Универзитет у Крагујевцу

Машински факултет Краљево

ЗБИРКА РЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ЗА ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Краљево, март 2011. године

Публикација
Збирка решених задатака за пријемни испит из математике

Издавач
Машински факултет Краљево

За издавача
Декан: др Новак Недић, ред. проф.

Задатке одабрао:
Зоран Богићевић, дипл. мат., асистент,
Машински факултет Краљево

Техничка обрада
Владимир Ђорђевић, дипл инж. маш.
Владимир Стојановић, дипл инж. маш.
Марко Николић, дипл инж. маш.
Бојан Белоица, дипл инж. маш.

Штампа
АДМ Графика, Краљево

Тираж
800 примерака

1

ИЗРАЗИ

Задатак 1.1 Израчунати вредност израза:

$$\left(81^{-2^{-2}}\right):\left(81^{(-2)^{-2}}\right)$$

Решење:

Дати израз једнак је *a:b*, где је:

$$a=81^{-2^{-2}}=81^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}$$

$$b=\left(81\right)^{(-2)^{-2}}=81^{\frac{1}{(-2)^2}}=81^{\frac{1}{4}}=\left(3^4\right)^{\frac{1}{4}}=3$$

Одавде следи да је:

$$a:b=\frac{1}{3}:3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

Задатак 1.2 Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{3}:\frac{25}{111}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Решење:

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{3}:\frac{25}{111}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{3}{5}+\frac{37}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{40}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(8\right)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{8^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{2}$$

Задатак 1.3 Израчунати вредност израза:

$$\left[\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Решење:

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\right):\left(\frac{91}{7}+\frac{6}{7}\right)=\left(\frac{3}{7}+\frac{10}{9}\right):\frac{97}{7}=$$

$$=\frac{3\cdot 9+10\cdot 7}{63}\cdot\frac{7}{97}=\frac{97}{63}\cdot\frac{7}{97}=\frac{1}{9}$$

Следи да је дати израз једнак:

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$$

Задатак 1.4 Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{1+\sqrt{9+\frac{25}{16}}}{3+\frac{5}{4}}\right)^{-1}$$

Решење:

Пошто је

$$1+\sqrt{9+\frac{25}{16}}=1+\sqrt{\frac{9\cdot 16+25}{16}}=1+\sqrt{\frac{169}{16}}=1+\frac{13}{4}=\frac{17}{4},$$

$$3+\frac{5}{4}=\frac{17}{4},$$

то је дати израз једнак $\left(\frac{17}{4}:\frac{17}{4}\right)^{-1}=\left(\frac{17}{4}\cdot\frac{4}{17}\right)^{-1}=1^{-1}=1$

Задатак 1.5 Израчунати вредност израза:

$$\left[\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}$$

Решење:

$$\left[\left(\frac{3}{16}:\left(8+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(\frac{3}{16}:\left(\frac{24}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=$$

$$=\left[\left(\frac{3}{16}:\frac{25}{3}+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{25}+\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(\frac{9}{400}+\frac{16}{400}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=$$

$$=\left[\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[\left(2^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}-1\right]^{-4}=\left[2-1\right]^{-4}=1^{-4}=1$$

Задатак 1.6 Израчунати вредност израза:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{\left(\sqrt{5}+2\right)^{2}+\left(\sqrt{5}-2\right)^{2}}{\left(\sqrt{5}-2\right)\cdot\left(\sqrt{5}+2\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\frac{5+4\sqrt{5}+4+5-4\sqrt{5}+4}{5-4}\right)^{-\frac{1}{2}}=18^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{18^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{9\cdot 2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Задатак 1.7 Упростити израз:

$$\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right)\cdot\left(a-5+\frac{15a}{a-5}\right) \text{ ако } a\in R\setminus\{5\}$$

Решење:

Код трансформација рационалних алгебарских израза, између осталог, се користе формуле:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,\quad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);$$

Што се тиче самог израза, за $a\neq 5$, важи:

Нека је притом $A=\dfrac{25}{a^2+5a+25}-\dfrac{2a}{5-a}-\dfrac{a^3+25a^2}{a^3-125}$

$$\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}=\frac{25(a-5)+2a(a^2+5a+25)-(a^3+25a^2)}{(a-5)(a^2+5a+25)}=$$

$$=\frac{25a-125+2a^3+10a^2+50a-a^3-25a^2}{(a-5)(a^2+5a+25)}=\frac{a^3-15a^2+75a-125}{(a-5)(a^2+5a+25)}=$$

$$=\frac{(a-5)^3}{(a-5)(a^2+5a+25)}=\frac{(a-5)^2}{a^2+5a+25}$$

Нека је $B=a-5+\dfrac{15a}{a-5}$

$$a-5+\frac{15a}{a-5}=\frac{(a-5)^2+15a}{a-5}=\frac{a^2-10a+25+15a}{a-5}=\frac{a^2+5a+25}{a-5}$$

Па је вредност почетног израза једнака $A\cdot B$:

$$A\cdot B=\frac{(a-5)^2}{a^2+5a+25}\cdot\frac{a^2+5a+25}{a-5}=a-5$$

Задатак 1.8 Упростити израз:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$$

Решење:

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

Задатак 1.9 Упростити израз:

$$\left(\frac{a+1}{a^2-4}+\frac{1-a^2}{a^3+8}\right):\frac{1}{(a-1)^2+3},\text{ за } |a|\neq 2$$

Решење:

Нека је $A=\frac{a+1}{a^2-4}+\frac{1-a^2}{a^3+8}$

$$A=\frac{a+1}{a^2-4}+\frac{1-a^2}{a^3+8}=\frac{a+1}{(a-2)(a+2)}+\frac{1-a^2}{(a+2)(a^2-2a+4)}=$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-2a+4)+(1-a)(1+a)(a-2)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)}=$$

$$=\frac{(a+1)\left[a^2-2a+4+(1-a)(a-2)\right]}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)}=\frac{(a+1)(a^2-2a+4+a-2-a^2+2a)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)}=$$

$$=\frac{(a+1)(a+2)}{(a-2)(a+2)(a^2-2a+4)}=\frac{a+1}{(a-2)(a^2-2a+4)}$$

Нека је $B = \dfrac{1}{\left(a-1\right)^2 + 3} = \dfrac{1}{a^2 - 2a + 4}$

Тада је почетни израз једнак

$$A : B = \frac{a+1}{\left(a-2\right)\left(a^2 - 2a + 4\right)}\left(a^2 - 2a + 4\right) = \frac{a+1}{a-2}$$

Задатак 1.10 Израчнати вредност израза:

$$2^{3a} \cdot 3^{2a}$$

Решење:

$$2^{3a} \cdot 3^{2a} = \left(2^3\right)^a \cdot \left(3^2\right)^a = 8^a \cdot 9^a = \left(8 \cdot 9\right)^a = 72^a$$

2

КВАДРАТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Једначина облика $ax^2+bx+c=0$ где су $a,b,c\in R$ и $a\neq 0$ назива се квадратном једначином. Израз $D=b^2-4ac$ је дискриминанта квадратне једначине. Ако је $D>0$ квадратна једначина има 2 реална и различита решења:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

За $D=0$ једначина има двоструко решење $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$, а за $D<0$ решења једначине су комплексни бројеви.

Задатак 2.1 Решити једначину:

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1}$$

Решење:

Једначину сведемо на облик $\frac{A}{B}=0 \leftrightarrow A=0$ и $B\neq 0$. Раставимо квадратни трином $2x^2+7x-4$ на чиниоце:

$$2x^2+7x-4 \Rightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{-7\pm 9}{4}$$

Пошто су решења $x_1=-4$, $x_2=\frac{1}{2}$, квадратни трином се може записати као:

$$2x^2+7x-4=2\left(x+4\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x+4\right)\left(2x-1\right)$$

Сада добијамо:

$$1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{(x+4)(2x-1)}-\frac{6}{2x-1}=0$$

$$\frac{2x^2+7x-4+2x(2x-1)+27-6(x+4)}{(x+4)(2x-1)}=0$$

$$\frac{2x^2+7x-4+4x^2-2x+27-6x-24}{(x+4)(2x-1)}=0$$

$$\frac{6x^2-x-1}{(x+4)(2x-1)}=0$$

$$6x^2-x-1=0 \quad \text{и} \quad (x+4)(2x-1)\neq 0 \Rightarrow x\neq 4 \text{ и } x\neq \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{1\pm 5}{12} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \text{ и } x_2=-\frac{1}{3}$$

Међутим, због условне једначине једино решење је $x=-\frac{1}{3}$.

Задатак 2.2 Решити једначину:

$$x^2-2|x|-3=0$$

Решење:

Размотрићемо следећа два случаја:

1. У случају $x\geq 0$ једначина постаје $x^2-2x-3=0$, њена решења су:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2} \quad x_1=3 \text{ и } x_2=-1.$$

Због ограничења једино решење је $x = 3$.

2. У случају за $x < 0$, једначина постаје $x^2 + 2x - 3 = 0$ и њена решења су:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \quad x_1 = -3 \text{ и } x_2 = 1 .$$

Због ограничења једино решење је $x = -3$.

Дакле, решења дате једначине су: $x_1 = 3$ и $x_2 = -3$.

Задатак 2.3 За које вредности једином параметра m квадратна једначина $\mathrm{x}^2 - (\mathrm{m} + 1)\mathrm{x} + 2\mathrm{m} - 1 = 0$ има двострука реална решења?

Решење:

$$x_1 = x_2 \in R \quad \leftrightarrow \quad D = 0$$

$$D = [-(m+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m - 1) = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 - 8m + 4 = 0 , \quad m^2 - 6m + 5 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad , \quad m_1 = 1 \text{ и } m_2 = 5$$

Задатак 2.4 Решити неједначину:

$$\frac{x - 4}{4x^2 - 4x - 3} > 0$$

Решење:

Дату неједначину је најлакше решити уз помоћ бројевних правих.

Одредимо нуле функције $f(x) = 4x^2 - 4x - 3$:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{8} = \frac{4 \pm 8}{8} \quad , \quad x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

Сада добијамо:

$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$4x^2-4x-3$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x-4}{4x^2-4x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	4	

Па је скуп решења дате неједначине $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) \cup (4,+\infty)$.

Задатак 2.5 Одредити целобројна решења неједначине:

$$x^2-4x \leq 5$$

Решење:

Дату неједначина је еквивалентна неједначини $x^2-4x-5 \leq 0$. Нуле квадратног тринома на левој старани су:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \quad , \quad x_1 = -1 \quad \text{и} \quad x_2 = 5$$

x^2-4x-5	$+$	$-$	$+$
	-1	5	

Према томе, дата неједначина је задовољена ако и само ако $x \in [-1,5]$. Цели бројеви који припадају сегменту $[-1,5]$ су $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Задатак 2.6 Одредити реалан параметар α тако да је збир квадрата решења једначине $\mathrm{x}^2+3\alpha\mathrm{x}+\alpha^2=0$ буде $\mathbf{\frac{7}{4}}$.

Решење:

За решавање овог задатка потребне су нам Виетове формуле. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ тада важи:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

За дату квадратну једначину добијамо:

$$x_1 + x_2 = -3\alpha, \quad x_1 \cdot x_2 = \alpha^2$$

Приметимо да се дати услов $x_1^2 + x_2^2 = \frac{7}{4}$ може написати у облику $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{7}{4}$ одакле се добија $9\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{7}{4}$, $\alpha^2 = \frac{1}{4}$ па су решења $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$.

Задатак 2.7 За које је вредности реалног броја m једно решење квадратне једначине $(m-3)x^2 - (m+4)x + 3m = 0$ три пута веће од другог?

Решење:

На основу Виетових формула је $x_1 + x_2 = \frac{m+4}{m-3}$ и $x_2 \cdot x_2 = \frac{3m}{m-3}$. У задатку се захтева да буде $x_1 = 3x_2$. Добијамо:

$4x_2 = \frac{m+4}{m-3}$ и $3x_2^2 = \frac{3m}{m-3}$ следи $x_2 = \frac{m+4}{4(m-3)}$

$$3\left(\frac{m+4}{4(m-3)}\right)^2 = \frac{3m}{m-3}$$

$$3\frac{(m+4)^2}{16(m-3)^2} = \frac{3m}{m-3}$$

$$3(m^2 + 8m + 16) = 48m(m-3)$$

$$m^2 + 8m + 16 = 16m^2 - 48m$$

$$-15m^2 + 56m + 16 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-56 \pm \sqrt{4096}}{-30} = \frac{-56 \pm 64}{-30}$$

$$m_1 = -4 \quad \text{и} \quad m_2 = -\frac{4}{15}$$

Задатак 2.8 Одредити домен параметра a тако да је неједнакост $\frac{x+a}{x^2+x+1} < \frac{\mathrm{x}}{x^2+2x+3}$ тачна за свако x.

Решење:

Пошто за свако $x \in R$ важи $\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1>0$ и $\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+3>0$, после множења са $(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+3)$ дата неједнакост неће променити смисао. Дакле, дата неједнакост важи ако и само ако је $(\mathrm{x}+\mathrm{a})(\mathrm{x}^2+2\mathrm{x}+3)<x(\mathrm{x}^2+\mathrm{x}+1)$ tj.:

$$(a+1)x^2+(2a+2)x+3a<0$$

Последња неједнакост је тачна за свако $x \in R$ ако и само ако је $a+1<0$ и $D=4(a+1)^2-12a(a+1)<0$ што је испуњено ако и само ако $a<-1$ и $\big(a \in (-\infty,-1) \cup (1/2,+\infty)\big)$ tj. $a \in (-\infty,-1)$.

Задатак 2.9 Решити у скупу реалних бројева једначину:

$$(x-2)^6-19(x-2)^3=216$$

Решење:

Сменом $t=(x-2)^3$ дата једначина се своди на квадратну $t^2-19t-216=0$. Речења ове једначине су:

$$t_{1,2}=\frac{19 \pm \sqrt{1225}}{2}=\frac{19 \pm 35}{2} \qquad t_1=-8 \quad \text{и} \quad t_2=27$$

Из $(x-2)^3=-8$ следи $x-2=-2$ односно $x_1=0$,

а из $(x-2)^3=27$ следи $x-2=3$ односно $x_2=5$.

Задатак 2.10 Одредити вредности параметра m за које једначина x^2- $-(\mathrm{m}+2)\mathrm{x}+2\mathrm{m}+1=0$ има комплексне корене који задовољавају релацију: $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1} \leq 1$.

Решење:

Дискриминанта дате једначине је $D=[-(m+2)]^2-4(2m+1)=m^2-4m$. Решења су комплексна ако и само ако је $D<0$, tj.:

D $\quad\begin{array}{c} + + + \; - - - - \; + + + + + + + \\ \hline 0 \qquad\qquad 4 \end{array}$

$m \in (0,4)$ ……………………….(∗)

Услов $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 1$ је еквивалентан услову $\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} \leq 1$ тј.: $\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2} \leq 1$. Како је према Вијетовим формулама $x_1 + x_2 = m + 2$ и $x_1 x_2 = 2m + 1$, следи да је:

$$\frac{(m+2)^2 - 2(m+1)}{2m+1} \leq 1$$

односно после сређивања следи:

$$\frac{(m-1)^2}{2m+1} \leq 0$$

$(m-1)^2$ $\quad\begin{array}{c} + + + + + + + + + + + + + + + + \\ \hline 1 \end{array}$

$2m+1$ $\quad\begin{array}{c} - - - - - - \; + + + + + + + + + + \\ \hline -\frac{1}{2} \end{array}$

$\frac{(m-1)^2}{2m+1}$ $\quad\begin{array}{c} - - - - - - \; + + + + + + + + + + \\ \hline -\frac{1}{2} \qquad\qquad 1 \end{array}$

Значи $m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$ ……………………….(∗∗)

Из израза (∗) и (∗∗) следи да је $m = 1$.

3

ПОЛИНОМИ

Нека је полином $P_n(x)$ дефинисан једнакошћу: $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где су $a_0, a_1, \ldots \ldots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ реални (или комплексни) брпјеви , а x промењљива. На основу Безуове теореме остатак R при дељењу полинома $P_n(x)$ биномом $x - a$ је $P_n(a)$. Неопходан услов да несводљиви разломак $\frac{p}{q}$ $(p \in Z,\ g \in N)$ буде нула полинома $P_n(x)$ са целобројним коефицијентима је да $\frac{p}{a_n}$ (p дели a_n) и $\frac{pq}{a_0}$ (q дели a_0) .

Задатак 3.1 Одредити коефицијенте полинома:

$$P_2(x) = ax^2 + bx + c, \text{ ако је } P_2(0) = 1,\ P_2(1) = 2,\ P_2(2) = 4$$

Решење:

Из датих услова следи:

$P_2(0) = c = 1,\ \ P_2(1) = a + b + c = 2, \qquad P_2(2) = 4a + 2b + c = 4$

Решавањем овог система једначина добија се: $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1.$

Задатак 3.2 Одредити збир свих коефицијената полинома $P(x)$ ако је:

$$P(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 1)^{2000}$$

Решење:

Збир коефицијената полинома $P(x)$ добија се као вредност полинома P за $x = 1$. Према томе је:

$P(1) = (1^3 + 21^2 - 1 - 1)^{2000} = 1$

Задатак 3.3 Одредити остатак при дељењу полинома $P(x) = 4x^5 + 9x^3 + 19x + 90$ биномом $x + 1$.

Решење:

Према Безуовој теореми остатак дељења полиномом $P(x)$ са $x+1$ је:

$R = P(-1) = -4 - 9 - 19 + 90 = 60$

Задатак 3.4 Дат је полином $P(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m$. Одредити параметар m тако да полином $P(x)$ буде дељив са $x - 2$.

Решење:

На основу Безуове теореме важи да је $P(2) = 0$:

$2 \cdot 8 - 4m \cdot 4 + 2m - 2m = 0$

$16m = 16$

$m = 1$

Задатак 3.5 Дат је полином $P(x) = 2x^3 - 4mx^2 + mx - 2m$. Одредити параметар m тако да остатак при дељењу $P(x)$ са $x - 1$ буде једнак 7.

Решење:

Примењујући Безуову теорему добијамо $P(1) = 7$ да је:

$2 - 4m + m - 2m = 7$

$-5m = 5$

$m = -1$

Једначина $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ назива се алгебарском једначином степена n. Нека су $x_1, x_2, \dots \dots, x_n$ решења те једначине. Везу између коефицијената и решења те једначине дају уопштене Виетове формуле:

$$x_1 + x_2 + \dots \dots \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \ \dots\dots.. + x_{n-1} \cdot x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

… … ….

$$x_1 x_2 \dots\dots\dots . x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Задатак 3.6 Нека су x_1, x_2 и x_3 решења једначине $125x^3 - 64 = 0$. Одредити вредност израза $x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$.

Решење:

Користећи уопштене Виетове формуле добијамо:

$a_0 = 125$, $a_1 = a_2 = 0$ и $a_3 = -64$ сада је:

$x_1 + x_2 + x_3 = -125$, $x_1x_2x_3 = \frac{64}{125}$ одакле следи да је

$x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{64}{125}$.

Задатак 3.7 Једначина $x^3 + ax + b = 0$ $(a, b \in R)$ има решења $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Одредити производ свих решења те једначине.

Решење:

Из чињенице да су x_1 и x_2 решења дате једначине следи:

$1 + a + b = 0$

$8 + 2b + b = 0$

Одакле је $a = -7$ и $b = 6$. Следи да из уопштених Виетових формула добијамо: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -6$.

Задатак 3.8 Решити једначину:

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x - 2 + |x-2|} = 0$$

Решење:

Како важи да је:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$$

Следи:

1. За $x < 2$ добијамо:

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{x-2-(x-2)} = 0$$

   Дата једначина није дефинисана.

2. За $x \geq 2$ добијамо:

$$\frac{x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2(x-2)} = 0$$

   Па је ова једначина еквивалентна систему:

$$x \cdot (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0 \text{ и } x \neq 2$$

Решења су $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = 4$. Међутим, због датог ограничења једина решења су $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$.

Задатак 3.9 Ако је полином $P(x) = x^4 + 6x^3 - 8x^2 + ax + b$ дељив триномом $Q(x) = (x-1)(x-2)$, одредити a и b.

Решење:

Ако је $P(x)$ дељив са $Q(x)$ онда је $P(x)$ такође дељив и са $x-1$ и са -2 . Према Безуовој теореми је $P(1) = 0$ и $(2) = 0$, одакле следи:

$$a + b = 1$$

$$2a + b = -32$$

Решење овог система је $a = -33,\ b = 34$.

Задатак 3.10 Израчунати вредност израза:

$$a = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Решење:

Степеновањем леве и десне стране једначине са 3 добија се:

$$a^3 = 20 + 14\sqrt{2} + 3\left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} + 3\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} +\right)^2 + 20 - 14\sqrt{2}$$

$$a^3 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} \cdot + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}\right)$$

Како је израз у загради једнак а, добијамо:

$$a^3 = 40 + 3 \cdot \sqrt[3]{20^2 - \left(14\sqrt{2}\right)^2} \cdot a$$

Односно:

$$a^3 - 6a - 40 = 0$$

Значи, a је решење последње једначине. Приметимо да су коефицијенти полинома на левој страни цели бројеви. Испитајмо да ли једначина има решења на скупу рационалних бројева. Ако је $\frac{p}{q}$ решење једначине ($p \in Z$ и $q \in N$) онда $\frac{p}{40}$ и $\frac{q}{1}$. Према томе $P \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 20, \pm 40\}$ и $q = \{1\}$.
Методом покушаја тако се установљује да је $a = 4$ једино решење. Дељењем леве стране једначине са $a - 4$ добија се да је $(a - 4)(a^2 + 4a + 10) = 0$, како једначина $a^2 + 4a + 10 = 0$ нема реалних решења ($D = -24 < 0$), закључујемо да је $a = 4$ једино реално решење, што значи да је

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$$

4

АРИТМЕТИЧКИ И ГЕОМЕТРИЈСКИ НИЗОВИ

Низ бројева $a_1, a_2, \dots \dots \dots .., a_n$ је аритметички низ ако је :

$$a_{n+1} = a_n + d \,, \qquad (n \in N)$$

Број d назива се разлика аритметичког низа. Општи члан аритметичког низа рачуна се по формули:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

док се збир првих n чланова рачуна по формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n-1)d)$$

Низ бројева $a_1, a_2, \dots \dots \dots .., a_n$ је геометријски низ ако је :

$$a_{n+1} = a_n \cdot q \,, \qquad (n \in N) \ \text{ и } \ a_1 \neq 0, \quad q \neq 0$$

Број q се назива количник геометријског низа. Општи члан геометријског низа рачуна се по формули:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

док се збир првих n чланова рачуна по формули:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad (q \neq 1)$$

Задатак 4.1 Аритметички низ дат је својим првим чланом $a_1 = 10$ и разликом $\mathrm{d} = -5$. Одредити првих шест чланова низа.

Решење:

Користећи се формулом за општи члан аритметичког низа добијамо:

$a_2 = a_1 + d = 5$

$a_3 = a_1 + 2d = a_2 + d = 0$

$a_4 = a_1 + 3d = -5$

$a_5 = a_1 + 4d = -10$

$a_6 = a_1 + 5d = -15$

Задатак 4.2 Наћи осми члан аритметичког низа $1, 3, 5, 7, \ldots \ldots$

Решење:

Обележимо са $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$. Како је $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = 2$ и користећи се формулом за општи члан аритметичког низа добијамо:

$a_8 = a_1 + 7d = 1 + 7 \cdot 2 = 15$

Задатак 4.3 За аритметички низ са општим чланом $\boldsymbol{a_n}$ важи:

$a_2 - a_6 + a_4 + 7 = 0$ и

$a_8 - a_7 - 2a_4 = 0$

Израчунати први члан и разлику овог низа.

Решење:

Користећи се формулом $a_n = a_1 + (n-1)d$ препишемо дати систем једначина:

$a_1 + d \ - (a_1 + 5d\ ) + a_1 + 3d + 7 = 0$

$a_1 + 7d \ - (a_1 + 6d) - 2(a_1 + 3d) = 0$

Сада следи:

$a_1 - d = -7$

$-2a_1 - 5d = 0$

Решење овог система је $a_1 = -5$ и $d = 2$.

Задатак 4.4 Дат је први члан $a_1 = 6$ и количник $q = -\frac{1}{2}$ геометријског низа. Написати првих шест чланова тог низа.

Решење:

Користећи се формулом $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ добијамо:

$a_2 = a_1 \cdot q = -3$

$a_3 = a_1 \cdot q^2 = a_2 \cdot q = \frac{3}{2}$

$a_4 = a_1 \cdot q^3 = -\frac{3}{4}$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 = \frac{3}{8}$

$a_6 = a_1 \cdot q^5 = -\frac{3}{16}$

Задатак 4.5 Дат је општи члан геометријског низа $a_n = \frac{5}{7^n}$. Одредити први члан и количник тог низа.

Решење:

Први члан геометријског низа је $a_1 = \frac{5}{7}$. Како је $a_2 = \frac{5}{7^2}$ то је:

$$q = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{5}{7^2}}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{7}$$

Задатак 4.6 Дат је први члан $a_1 = -1$ и количник $q = 3$ геометријског низа. Одредити индекс члана тог низа чија је вредност -81.

Решење:

Како је $a_n = -81$ и $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ имамо следећу једначину:

$-81 = -1 \cdot 3^{n-1}$

$3^4 = 3^{n-1}$

Па добијамо да је $n = 5$.

Задатак 4.7 Збир трећег и седмог члана аритметичког низа је 6, а њихов производ је 8. Израчунати збир првих шеснаест чланова те прогресије.

Решење:

Према услову задатка је:

$a_3 + a_7 = 6$

$a_3 \cdot a_7 = 8$

Односно

$2a_1 + 8d = 6$

$(a_1 + 2d) \cdot (a_1 + 6d) = 8$

Из прве једначине следи да је $a_1 = 3 - 4d$ и заменом у другу добијамо:

$(3 - 4d + 2d) \cdot (3 - 4d + 6d) = 8$

$(3 - 2d) \cdot (3 + 2d) = 8$

$9 - 4d^2 = 8$

$d^2 = \frac{1}{4}$

тако да имамо два решења:

$d = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$ и

$d = -\frac{1}{2}$, $a_1 = 5$

У првом случају је:

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left(2 \cdot 1 + 15 \cdot \frac{1}{2}\right) = 76 ,$$

а у другом:

$$S_{16} = \frac{16}{2}\left(2 \cdot 5 - 15 \cdot \frac{1}{2}\right) = 20 ,$$

Задатак 4.8 Израчунати збир свих парних двоцифрених бројева.

Решење:

Низ парних двоцифрених бројева је аритметички низ са првим чланом $a_1 = 10$ и разликом $= 2$. Таквих бројева има $n = \frac{98-10}{2} + 1 = 45$ па је:

$$S = S_{45} = \frac{a_1 + a_{45}}{2} \cdot 45 = \frac{10 + 98}{2} \cdot 45 = 2430$$

Задатак 4.9 Одредити четири узастопна члана геометријског низа ако је збир крајњих чланова једнак -49, а средњих 14.

Решење:

Из услова задатка имамо:

$a_1 + a_4 = -49$ и

$a_2 + a_3 = 14$

Односно:

$a_1(1 + q^3) = -49$

$a_1 q(1 + q) = 14$

Добијамо:

$$\frac{a_1(1+q)(1-q+q^2)}{a_1q(1+q)} = -\frac{49}{14}$$

тј.:

$$1-q+q^2 = -\frac{7}{2}$$

Решења ове једначине су:

$$q = 2 \quad \text{или} \quad q = -\frac{1}{2}$$

У првом случају је:

$$a_1 = 7,\ a_2 = -14,\ a_3 = 28, \quad a_4 = -56\ .$$

а у другом је:

$$a_1 = -56,\ a_2 = 28,\ a_3 = -14, \quad a_4 = 7\ .$$

Задатак 4.10 Бројеви $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2$ и a_3 чине геометријску прогресију. Ако је $\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2 \cdot \mathrm{a}_3 = 343$ и $\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1 = 5$, одредити њихов збир.

Решење:

Из првог услова добијамо:

$(a_1 \cdot q)^3 = 343$ односно

$a_1 \cdot q = 7$

Дакле $a_2 = 7$, па из другог услова следи да је $a_1 = 2$.

Даље је $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{7}{2}$ и $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 \cdot \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{67}{2}$

5

ПЛАНИМЕТРИЈА И СТЕРЕОМЕТРИЈА

Задатак 5.1 Колике су странице правоугаоника чији је обим 7,4 m, а површина 3 m^2.

Решење:

Обим правоугаоника страница a и b је $O = 2(a+b)$, а површина је $P = a \cdot b$. Из услова задатка следи да је:

$2(a+b) = 7{,}4$

$a \cdot b = 3$

tj.

$a = 3{,}7 - b$

$b(3{,}7 - b) = 3$

Решимо последњу једначину:

$-b^2 + 3{,}7b - 3 = 0$

$10b^2 - 37b - 30 = 0$

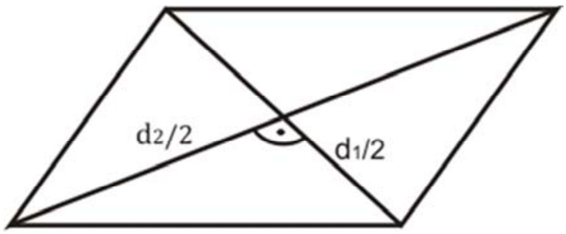
$b_{1,2} = \frac{37 \pm \sqrt{169}}{20} = \frac{37 \pm 13}{20}$

$b_1 = 2{,}5 \quad b_2 = 1{,}2$

У првом случају је $b = 2{,}5\,m$ и $a = 1{,}2m$, а у другом $b = 1{,}2\,m$ и $a = 2{,}5m$.

Задатак 5.2 Одредити странице ромба површине 16cm^2 чији је однос дијагонала $d_1 : d_2 = 1 : 2$.

Решење:



Како је површина ромба $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ и из услова задатка добијамо следећи систем:

$$\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 16$$

$$d_2 = 2d_1$$

Решења овог система су $d_1 = 4\ cm$, $d_2 = 8\ cm$.

Из Питагорине теореме следи да је:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

Односно:

$$a^2 = 4 + 16$$

Сада је:

$$a = 2\sqrt{5}\ \ cm.$$

Задатак 5.3 Одредити збир унутрашњих углова многоугла код којег је збир броја страница и броја дијагонала једнак 190.

Решење:

Како је број дијагонала конвексног многоугла једнак $D_n = \frac{n(n-3)}{2}$ добијамо једначину:

$$n + \frac{n(n-3)}{2} = 190$$

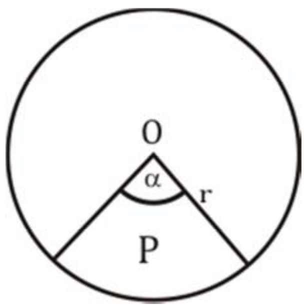
$$n^2 - n - 380 = 0$$

Једино решење које је природан број је $n = 20$, па је збир углова једнак:

$$S_n = (n-2) \cdot 180° = 3240°$$

Задатак 5.4 Одредити централни угао који одговара исечку површине $9{,}6\pi \ cm^2$ ако је полупречник круга $r = 12\ cm$.

Решење:



Како је површина кружног исечка $P = \frac{r^2\pi\alpha}{360°}$, добијамо следећу једначину:

$$9{,}6\pi = \frac{12^2 \cdot \pi\alpha}{360°}$$

Чије је решење $\alpha = 24°$.

Задатак 5.5 Одредити запремину лопте чија је површина $P = 324\pi$.

Решење:

Из формуле за површину лопте $P = 4R^2\pi$ добијамо:

$$324\pi = 4R^2\pi$$

Сада је $R = 9$.

Одавде следи да је:

$$V = \frac{4}{3}R^3\pi = 972\pi$$

Задатак 5.6 Обим основе ваљка је $12\pi\ cm$, а висина $H = 16\ cm$. Израчунати површину и запремину ваљка.

Решење:

Формуле за површину и запремину ваљка су:

$$P = 2\pi r(r + H)$$

$$V = r^2\pi H$$

Како је основа ваљка круг имамо да је:

$$2r\pi = 12\pi$$

То значи да је

$$r = 6\ cm$$

Према томе површина ваљка је:

$$P = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 6 \cdot (6 + 16) = 264\pi\ \ cm^2$$

Односно запремина ваљка је:

$$V = r^2\pi H = 6^2\pi \cdot 16 = 576\pi\ \ cm^3$$

Задатак 5.7 Израчунати дужину полипречника уписане кружнице троугла АВС ако је $a = 25\ cm,\ b = 29cm$ и $c = 36\ cm$.

Решење:

Из формуле $P_{\Delta ABC} = r \cdot s$ где је:

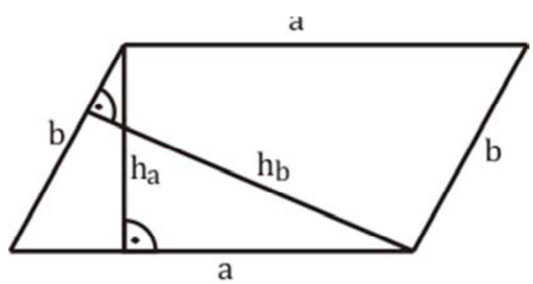
$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad \text{и} \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Добијамо да је:

$$r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} = \frac{\sqrt{45 \cdot 20 \cdot 16 \cdot 9}}{45} = 8\ \ cm$$

Задатак 5.8 Површина паралелограма страница 10cm и 12 cm је 60 cm^2 . Наћи висине овог паралелограма.

Решење:



Користећи формулу за површину паралелограма биће:

$$P = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Добијамо да је:

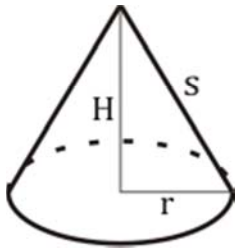
$$h_a = \frac{P}{a} = \frac{60}{10} = 6\ \ cm$$

односно

$$h_b = \frac{P}{b} = \frac{60}{12} = 5\ \ cm$$

Задатак 5.9 Висина H и изводница s праве купе односе се као 3:5, а њена запремина је $128\pi\ cm^3$. Одредити њену површину.

Решење:



На основу Питагорине теореме је:

$$S^2 = H^2 + r^2$$

Према услову задатка је:

$$S = \frac{5H}{3}$$

Па из ових једначина добијамо:

$$r^2 = \frac{16H^2}{9}$$

Такође је познато да је запремина купе:

$$V = 128\pi$$

Односно:

$$\frac{r^2\pi \cdot H}{3} = 128\pi$$

Сада је:

$$H = 6\ cm$$

На основу претходног следи да је:

$r = 8\ cm$ и $s = 10\ cm$

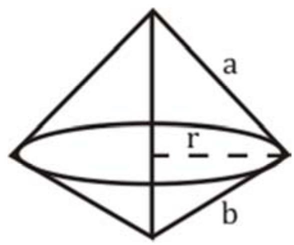
Површина купе је:

$$P = r\pi(r + s) = 144\pi \quad cm^2$$

Задатак 5.10 Одредити површину тела које настаје обртањем правоуглог троугла око хипотенузе ако његове катете имају дужину a и b .

Решење:

Тело које се добија приказано је на слици:



То су две купе са спојеним основама па је:

$$V = V_1 + V_2$$

Полупречник основе r је висина која одговара хипотенузи c , према томе:

$$r = h_c = \frac{2P}{c} = \frac{2\frac{a \cdot b}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Збир висина $H_1 + H_2$ ове две купе једнак је хипотенузи c, па имамо:

$$V = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_1 + \frac{1}{3}r^2\pi \cdot H_2 = \frac{1}{3}r^2\pi \cdot (H_1 + H_2)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2b^2}{(a^2 + b^2)} \cdot \pi \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2\pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$$

6

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Експоненцијалне једначине су једначине код којих се непозната налази у изложиоцу.
Нека је $a > 0, a \neq 1$. Тада

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

ако и само ако је

$$f(x) = g(x)$$

Задатак 6.1 Решити једанчину:

$$9^{-\frac{1}{x}} = 3$$

Решење:

Дата једначина је дефинисана за $x \neq 0$. Довођењем на исте основе добијамо

$$(3^2)^{-\frac{1}{x}} = 3$$

$$3^{-\frac{2}{x}} = 3^1 \rightarrow -\frac{2}{x} = 1$$

$$x = -2$$

Задатак 6.2 Решити једначину:

$$16^{\frac{1}{x}} = \sqrt{8^x}$$

Решење:

Дата једначина је дефинисана за $x \neq 0$. Довођењем на основу 2 добијамо:

$$(2^4)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{(2^3)^x}$$

$$2^{\frac{4}{x}} = \sqrt{2^{3x}}$$

$$2^{\frac{4}{x}} = 2^{\frac{3x}{2}} \rightarrow \frac{4}{x} = \frac{3x}{2}$$

$$x^2 = \frac{8}{3}$$

$$x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Задатак 6.3 Решити једначину:

$$2^x \cdot 3^{x+1} = 18$$

Решење:

Користећи особину $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ добијамо

$$2^x \cdot 3^x \cdot 3 = 18$$

$$(2 \cdot 3)^x = 6$$

$$6^x = 6^1$$

$$x = 1$$

Задатак 6.4 Решити једначину:

$$3^x \cdot 4^{x+1} = 576$$

Решење:

$$3^x \cdot 4^x \cdot 4 = 576$$

$$(3 \cdot 4)^x = \frac{576}{4}$$

$12^x = 144$

$12^x = 12^2$

$x = 2$

Задатак 6.5 Решити једначину:

$$4^{x+1} + 4^x = 320$$

Решење:

$4^x \cdot 4 + 4^x = 320$

$4^x \cdot (4 + 1) = 320 /: 5$

$4^x = 64$

$4^x = 4^3$

$x = 3$

Задатак 6.6 Решити једначину:

$$5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$$

Решење:

$5^x + 3 \cdot 5^x \cdot 5^{-2} = 140$

$5^x \left(1 + \frac{3}{25}\right) = 140$

$5^x \cdot \frac{28}{25} = 140 \Big/ \cdot \frac{25}{28}$

$5^x = 125$

$5^x = 5^3$

$x = 3$

Задатак 6.7 Решити једначину:

$$10 \cdot 2^x - 4^x = 16$$

Решење:

Уведимо смену $t = 2^x > 0$. Добијамо:

$10 \cdot t - t^2 = 16$

$t^2 - 10 \cdot t + 16 = 0$

$t_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2}$

$t_1 = 2, t_2 = 8$

$2^x = 2$

$x_1 = 1$

$2^x = 8$

$2^x = 2^3$

$x_2 = 3$

Задатак 6.8 Решити једначину:

$$5^x - 24 = \frac{25}{5^x}$$

Решење:

Уведимо смену $t = 5^x > 0$. Добијамо:

$t - 24 = \frac{25}{t} / \cdot t$

$t^2 - 24t + 25 = 0$

$t_{1/2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 100}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{24 \pm 26}{2}$

$t_1 = \frac{24-26}{2} = -1$ (ово решење не задовољава услов $t > 0$)

$$t_2 = \frac{24+26}{2} = 25$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$x = 2$$

Задатак 6.9 Решити једначину:

$$9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$$

Решење:

Трансформацијом једначине добијамо:

$$3^{2x} + 2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 2^{2x} = 0 /: 2^{2x}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$$

Уведимо смену $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$t_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ (ово решење не задовољава услов $t > 0$)

$$t_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Задатак 6.10 Решити једначину:

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$$

Решење:

Трансформацијом једначине добијамо:

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x = 0/: 9^{2x}$$

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 2 - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x = 0$$

Уведемо смену $t = \left(\frac{4}{9}\right)^x > 0$

$$3 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 2 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$t_1 = \frac{5 - 1}{6} = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{5 + 1}{6} = 1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0$$

$$x = 0$$

7

ЛОГАРИТМИ И ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

$x = log_a b \quad \leftrightarrow \quad a^x = b \qquad (a > 0, a \neq 1, b > 0)$

Основне особине логаритма су:

$a^{log_a b} = b,$ за $a > o, a \neq 1, b > 0$

$log_a xy = log_a x + log_a y,$ за $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$

$log_a x^s = s log_a x,$ за $a > 0, a \neq 1, x > 0, s \in R$

$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y,$ за $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$

$log_a 1 = 0,$ за $a > 0, a \neq 1$

$log_a a = 1,$ за $a > 0, a \neq 1$

$log_b a = \frac{1}{log_a b}$, за $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$, за $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$

$log_{a^s} x = \frac{1}{s} log_a x,$ за $x > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 1$

$log_a x = log_{a^s} x^s$, за $x > 0, a > 0, a \neq 1, s \neq 1$

Задатак 7.1 Израчунати x ако је $log_3 9 = x$.

Решење:

Из дефиниције логаритма следи да је:

$3^x = 9$ односно $x = 2$.

Задатак 7.2 Израчунати x ако је $log_x 125 = 3$.

Решење:

Из дефиниције логаритма следи да је:

$x^3 = 125, \quad x = \sqrt[3]{125}\ , \quad x = 5$

Задатак 7.3 Одредити x из једначине:

$$log_2 x = log_2 a + log_2 b \qquad (a, b\ > 0)$$

Решење:

Користећи особине логаритма добијамо:

$log_2 x = log_2 ab$

$x = ab$

Задатак 7.4 Израчунати:

$$log_8 log_4 log_2 16$$

Решење:

$log_8 log_4 log_2 2^4 = log_8 log_4 4 = log_8 1 = 0$

Једначина $log_{a(x)} f(x) = log_{a(x)} g(x)$ је еквивалентна систему:

$a(x) > 0$ и $a(x) \neq 1$ и $f(x) > 0$ и $f(x) = g(x)$.

Реалан број x је решење неједначине $log_{a(x)}f(x) < log_{a(x)}g(x)$ ако и само ако је решење бар једног од следећа два система неједначина:

1. $a(x) > 0$ и $0 < f(x) < g(x)$.

2. $0 < a(x) < 1$ *и* $f(x) > g(x) > 0$.

Задатак 7.5 Решити једначину:

$$log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 2$$

Решење:

Дата једначина је еквивалентна систему:

$$x - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{и} \quad x - 1 > 0$$

$$x = 1 + \frac{1}{9} \quad \text{и} \quad x > 1$$

$$x = \frac{10}{9} \quad \text{и} \quad x > 1$$

Тако да је решење $x = \frac{10}{9}$.

Задатак 7.6 Решити неједначину:

$$log_2(3x-2) < 0$$

Решење:

Дата неједначина је еквивалентна неједначини:

$$log_2(3x-2) < log_2 1$$

А ова систему:

$$0 < 3x - 2 < 1$$

Па је решење неједначине:

$$\frac{2}{3} < x < 1$$

Задатак 7.7 Решити неједначину:

$$log_{\frac{1}{5}}\frac{4x+6}{x} \geq 0$$

Решење:

Дата неједначину напишемо у облику:

$$log_{\frac{1}{5}}\frac{4x+6}{x} \geq log_{\frac{1}{5}}1$$

Одавде добијамо:

$$0 < \frac{4x+6}{x} \leq 1$$

Значи добили смо систем од две неједначине:

$$\frac{4x+6}{x} > 0 \qquad (1)$$

$$\frac{4x+6}{x} \leq 1 \qquad (2)$$

Решења једначине (1):

$4x+6$ $\qquad - - - - - - + + + + + + + + + +$

$\qquad\qquad\qquad -\frac{3}{2}$

x $\qquad - - - - - - - - - - + + + + + + +$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 0$

$\frac{4x+6}{x}$ $\qquad + + + + + + - - - - + + + + + +$

$\qquad\qquad -\frac{3}{2} \qquad\qquad 0$

Значи $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (0, +\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (*)$

Решења једначине (2):

$$\frac{4x + 6 - x}{x} \leq 0\ ,$$

$$\frac{3x + 6}{x} \leq 0$$

$3x + 6$	$- - - - - -$	-2	$+ + + + + + + + + +$
x	$- - - - - - - - - - -$	0	$+ + + + + + +$

$\frac{3x + 6}{x}$	$+ + + + + +$	-2	$- - - -$	0	$+ + + + + +$

Значи $x \in [-2, 0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (**)$

Из израза (*) и (**) следи да је:

$$x \in [-2, -\frac{3}{2})$$

Задатак 7.8 Решити једначину:

$$log_x 2 - log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

Решење:

Област дефинисаности је $x > 0, x \neq 1$, то јест $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$. Користећи особине логаритма трансформишемо дату једначину:

$$\frac{1}{log_2 x} - \frac{1}{2} log_2 x + \frac{7}{6} = 0$$

Уведемо смену $t = log_2 x$.

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{2}t + \frac{7}{6} = 0$$

$$-3t^2 + 7t + 6 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{-6} = \frac{-7 \pm 11}{-6}$$

$$t_1 = -\frac{2}{3}, \qquad t_2 = 3$$

Враћајући смену добијамо да су:

$log_2 x = -\frac{2}{3}$, $\qquad x_1 = 2^{-\frac{2}{3}}$ и

$log_2 x = 3$, $\qquad x_2 = 2^3 = 8$ решења.

Задатак 7.9 Решити једначину:

$$log_{16} x + log_4 x + log_2 x = 7$$

Решење:

Трансформишемо дату једначину:

$$log_{2^4} x + log_{2^2} x + log_2 x = 7$$

$$\frac{1}{4} log_2 x + \frac{1}{2} log_2 x + log_2 x = 7$$

$$\frac{7}{4} log_2 x = 7$$

$$log_2 x = 4$$

Па је решење једначине:

$$x = 2^4 = 16$$

Задатак 7.10 Решити неједначину:

$$log_x 2 < 1$$

Решење:

Запишемо неједначину у облику:

$log_x 2 < log_x x$

Реалан број x је решење ове неједначине ако и само ако је решење бар једног од следећа два система неједначина:

(1) $0 < x < 1\,, \qquad 2 > x$

(2) $x > 1\,, \qquad 2 < x$

Скуп свих решења првог система је:

$S_1 = (0{,}1)$

А другог је:

$S_2 = (2, +\infty)$

Према томе:

$x \in S_1 \cup S_2 = (0{,}1) \cup (2, +\infty)$

8

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Задатак 8.1 Доказати да је троугао са теменима A(-3,-2), B(0,-1) и C(-2,5) правоугли.

Решење:

Растојање d између тачке $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ рачуна се по формули :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

На основу ове формуле дужине страница троугла су:

$$|AB| = \sqrt{(0+3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$|BC| = \sqrt{(-2-0)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$|AC| = \sqrt{(-2-3)^2 + (5+2)^2} = 5\sqrt{2}$$

Очигледно је $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$, па је троугао правоугли.

Задатак 8.2 Одредити једначину праве која са осом Ox гради угао од 135^o и која садржи тачку A(-3,-2).

Решење:

Једначина праве која садржи тачку $A(x_1,y_1)$ и има дати коефицијент правца $k = tg\alpha$ има облик:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

У овом случају коефицијент правца је $k = tg135 = -1$, па је једначина праве:

$y + 2 = -(x + 3)$, односно:

$y = -x - 5$

Задатак 8.3 Одредити координате центра и дужину полупречника кружнице $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Решење:

Једначина кружнице са центром у тачки C(p,q) и полупречником r има облик:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$$

Како се кружница из задатка може написати у облику:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$$

То је центар C(2,-3) , и r=4.

Задатак 8.4 Одредити једначину елипсе чије је растојање међу жижама једнако 8, а мале полуосе је $b = 3$.

Решење:

За $a > 0$ и b> 0 једначина елипсе има облик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Растојање између жижа је 2c, па је c=4. Даље је $a^2 = b^2 + c^2 = 25$, одакле следи да је $a = 5$. Тако да је једначина тражене елипсе:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Задатак 8.5 Израчунати ексцентрицитет хиперболе чија асимптота заклапа са осом Ox угао од 60^o.

Решење:

Једначина хиперболе је једначина облика:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Где су $a > 0$ и b> 0 . Праве $y = \pm\frac{b}{a}x$ су асимптоте хиперболе. Број $e = \frac{c}{a}$ назива се ексцентрицитет хиперболе, где је:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

У једначини асимптоте је:

$$k = \frac{b}{a} = tg60°$$

Па је $b = \sqrt{3}a$, одавде је екцентрицитет хиперболе:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = 2$$

Задатак 8.6 Одредити једначину тангенте на параболу $y^2 = 16x$ која је нормална на праву $4x + 2y + 7 = 0$.

Решење:

Једначина параболе чија је оса симетрије оса Ox је:

$$y^2 = 2px \qquad (p > 0)$$

Услов додира праве $y = kx + n$ и параболе је $p = 2kn$. Коефицијент правца дате праве $y = -2x - \frac{7}{2}$ је -2 па је коефицијент правца тангенте $k = \frac{1}{2}$. Из услова додира даље се добијају:

$$8 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot n$$

$$n = 8$$

Па је једначина тангенте:

$$y = \frac{1}{2}x + 8$$

Задатак 8.7 Одредити параметар к тако да права $kx - 3y - 24 = 0$ буде тангента хиперболе $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Решење:

Услов додира праве $y = kx + n$ и хиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ је:

$$a^2k^2 - b^2 = n^2$$

Напишимо дату праву у облику:

$$y = \frac{k}{3}x - 8$$

Одакле добијамо да је коефицијент праве $\frac{k}{3}$, а $n = -8$.

Из услова додира следи:

$$36\left(\frac{k^2}{9} - 1\right) = 64$$

Следи да је: $k = \pm 5$.

Задатак 8.8 Одредити растојање пресечне тачке правих $4x - 3y = 0$ и $y - x = 1$ од координатног почетка.

Решење:

Пресечну тачку добијамо решавањем система:

$$4x - 3y = 0$$

$$-x + y = 1$$

И то је тачка $A(3,4)$, а њено растојање од O(0,0) је $d = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Задатак 8.9 Одредити растојање тачке M(1,1) од центра круга $x^2 + y^2 - -4x - 4y + 4 = 0$.

Решење:

Једначина круга може се написати у облику:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$$

Па је центар круга тачка C(2,2). Тражено растојање је:

$$d = |CM| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}$$

Задатак 8.10 Одредити параметре a и b, тако да праве $\boldsymbol{4x - 3y = 0}$ и $\boldsymbol{y - x = 1}$ буду тангенте елипсе $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

Решење:

Услов додира праве $y = kx + n$ и елипсе $\frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ је:

$$a^2k^2 + b^2 = n^2$$

Ако се примени услов додира у односу на сваку праву:

$$l_1: \qquad y = -\frac{1}{4}x + 25, \quad k_1 = -\frac{1}{4}\,, \;\; n_1 = \frac{25}{4}$$

$$l_2: \qquad y = -\frac{1}{9}x + \frac{25}{3}, \quad k_1 = -\frac{4}{9}\,, \;\; n_1 = \frac{25}{3}$$

Добија се систем једначина:

$$\frac{1}{16}a^2 + b^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \quad ; \quad \frac{16}{81}a^2 + b^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2$$

Где је $a > 0$ и b> 0 . Решење система је $(a, b) = (15{,}5)$.

9

ТРИГОНОМЕТРИЈСКИ ИЗРАЗИ. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ.

Задатак 9.1 Израчунати вредност израза:

$$\sin\frac{\pi}{8}$$

Решење:

Користећи се формулом за полу углове тригонометријских функција

$$\left|sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}$$

добијамо

$$sin\frac{\pi}{8} = sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Задатак 9.2 Израчунати вредност израза

$$\cos 36° \cdot \cos 72°$$

Решење:

Користећи се формулом $\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ и проширивањем израза са $\frac{2\sin 36°}{2\sin 36°}$ добијамо

$$I = cos\,36°\cdot cos\,72°\cdot\frac{2\,sin\,36°}{2\,sin\,36°} = \frac{2\,sin\,36°\cdot cos\,36°\cdot cos\,72°}{2\cdot sin\,36°}$$
$$= \frac{sin\,72°\cdot cos\,72°}{2\cdot sin\,36°}\cdot\frac{2}{2} = \frac{sin(2\cdot 72°)}{4\cdot sin\,36°} = \frac{sin\,144°}{4\cdot sin\,36°}$$

Користећи се са $\sin 144° = \sin(180° - 36°) = \sin 36°$ добијамо да је:

$$I = \frac{sin\, 36°}{4 \cdot sin\, 36°} = \frac{1}{4}$$

Задатак 9.3 Израчунати:

$$\sin 3000°$$

Решење:

Знајући да је период функције $\sin x$ једнак $T = 360°$ добијамо

$$sin\, 3000° = sin(120° + 8 \cdot 360°) = sin\, 120° = sin(90° + 30°) = cos\, 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

јер је $sin(90° + \alpha) = cos\, \alpha.$

Задатак 9.4 Ако је $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$, израчунати $\tan \alpha$.

Решење:

Користећи се формулом

$$tan(\alpha - \beta) = \frac{tan\, \alpha - tan\, \beta}{1 + tan\, \alpha \cdot tan\, \beta}$$

и чињеницом да је $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, следи

$$tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{tan\, \alpha - tan \frac{\pi}{4}}{1 + tan\, \alpha \cdot tan \frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{tan\, \alpha - 1}{1 + tan\, \alpha} = \frac{3}{4} / \cdot 4 \cdot (1 + tan\, \alpha)$$

$$4\, tan\, \alpha - 4 = 3 + 3\, tan\, \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad tan\, \alpha = 7$$

Задатак 9.5 Ако је $\sin 1994° = a, \tan 1994° = b, \operatorname{ctg} 1994° = c$. Одредити $max(a, b, c)$ и $min(a, b, c)$.

Решење:

На основу периодичности тригонометријских функција је

$$a = \sin 1994° = \sin(194° + 5 \cdot 360°) = \sin 194° = \sin(180° + 14°)$$
$$= -\sin 14°$$

$$b = \tan 1994° = \tan(14° + 11 \cdot 180°) = \tan 14°$$

$$c = \operatorname{ctg} 1994° = \operatorname{ctg}(14° + 11 \cdot 180°) = \operatorname{ctg} 14°$$

Очигледно је $min(a, b, c) = a$.

Како је $0 < b < 1$ следи да је $\operatorname{ctg} 14° = c = \frac{1}{b} > 1$.

Према томе је $max(a, b, c) = c$.

Задатак 9.6 Решити једначину

$$2\sin^2 x = 1$$

Решење:

Користећи се идентитетом $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$, добија се:

$$1 - \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 0$$

па је $2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

односно $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in Z)$.

Задатак 9.7 Решити једначину:

$$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$$

Решење:

Уведимо смену $t = \sin x, (-1 < t < 1)$

$$2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = \frac{-3 + 1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-3 - 1}{4} = -1$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

Како је $\operatorname{arc} \sin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\operatorname{arc} \sin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, \qquad (k \in Z)$$

$$\sin x = -1$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \ (n \in Z).$$

Задатак 9.8 Решити једначину

$$2\sin^2 x - \cos x = 1$$

Решење:

Користећи идентитет $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, дата једначина се трансформише

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x = 1$$

$-2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

Смена $t = \cos x$, $(-1 < t < 1)$

$-2t^2 - t + 1 = 0 / \cdot (-1)$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$$t_{1/2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

$$t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

Значи, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$.

Како је arc $\cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ то је

$x_{1/2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

и

$x = \pi + 2n\pi, \qquad (n \in Z)$

Задатак 9.9 Решити једначину

$$2\sin^2 x - 5\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

Решење:

Како $\cos x = 0$ не може бити решење дате једначине, поделимо је је са $\cos^2 x$

$$2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 5\frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + 3\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$2\tan^2 x - 5\tan x + 3 = 0$

Смена $t = \tan x$

$$2t^2 - 5t + 3 = 0$$

$$t_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{2}$$

за $\tan x = 1 \to x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k \in Z)$

за $\tan x = \frac{3}{2} \to x_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{2} + n\pi, \quad (n \in Z)$

Задатак 9.10 Решити једначину:

$$\sin 6x - \sin 4x = 0$$

Решење:

Користећи се идентитетом $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, добијамо

$$2 \cdot \cos\frac{6x + 4x}{2} \cdot \sin\frac{6x - 4x}{2} = 0$$

$$\cos 5x \cdot \sin x = 0$$

$$\cos 5x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, (k \in Z)$$

$\sin x = 0 \quad \to \quad x = n\pi, (n \in Z)$

10

ПРИМЕНА ТРИГОНОМЕТРИЈЕ У ПЛАНИМЕТРИЈИ

Задатак 10.1 Ако у ΔABC важи $\alpha = 2\beta$ и $b = 2, c = 3$, израчунати страницу a.

Решење:

Применом синусне теореме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, добија се $\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$ одакле следи да је

$$\frac{a}{2\sin\beta\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{4}$$

На основу косинусне теореме $b^2 = a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot cos\,\beta$ следи

$$4 = a^2 + 9 - 2\cdot a\cdot 3\cdot\frac{a}{4}$$

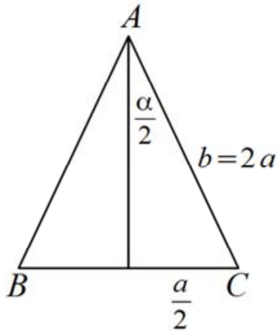
Одавде се добија да је $a = \sqrt{10}$

Задатак 10.2 У једнакокраком троуглу крак је два пута већи од основице. Ако је α угао између кракова, израчунати $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Решење:

Висина која одговара основици a је симетрала угла који образују краци, те је

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$



Задатак 10.3 Ако је у $\Delta ABC, \alpha = 30°, a = \sqrt{2}, b = 2$ израчунати угао β.

Решење:

Применом синусне теореме добија се

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30°} = \frac{2}{\sin\beta}$$

Па је $\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, одакле следи да постоје два решења $\beta_1 = 45°$ или $\beta_2 = 135°$.

Задатак 10.4 Ако у ΔABC, површине $P = 6\sqrt{3}$, странице $a = 3$ и $b = 7$ заклапају туп угао, одредити трећу страницу.

Решење:

Како је површина троугла

$$P = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

Следи да је

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin\gamma$$

$\sin\gamma = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

Даље је

$$\cos\gamma = -\sqrt{1-\sin^2\gamma} = -\sqrt{1-\frac{48}{49}} = -\frac{1}{7}$$

Према косинусној теореми је

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma$

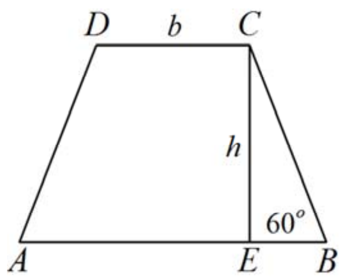
$c^2 = 9 + 49 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$

$c^2 = 64$

$c = 8$

Задатак 10.5 У трапезу $ABCD$ је $AB = 9, AD = BC = 4, < ABC = 60°$ израчунати површину трапеза.

Решење:



Нека је $CE = h$ висина трапеза. У правоуглом троуглу BEC је $\sin 60° = \frac{|CE|}{|BC|}$ па је $h = |CE| = 2\sqrt{3}$.

Такође је $\cos 60° = \frac{|BE|}{|BC|}$, одакле следи да је $|BE| = 2$. Како је трапез једнакокрак, па је

$b = |CD| = |AB| - 2|BE| = 5.$

Сада је

$$m = \frac{a+b}{2} = \frac{9+5}{2} = 7$$

па је површина трапеза $P = m \cdot h = 14\sqrt{3}.$

Задатак 10.6 У троуглу ΔABC је $\alpha = 30°, a = \sqrt{2}, b = 2$. Одредити остале углове троугла.

Решење:

Из синусне теореме је

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

одакле следи да је

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{2}}\sin 30°$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

па је

$\beta_1 = 45°$ $\beta_2 = 135°$

$\gamma_1 = 105°$ $\gamma_2 = 15°$

Задатак 10.7 У троуглу ABC дато је $\alpha = 45°, \beta = 60°$ и полупречник описаног круга $R = 2\sqrt{6}$. Одредити остале основне елементе без употребе таблица.

Решење:

Најпре ћемо наћи угао γ:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\gamma = 180° - (45° + 60°)$$

$$\gamma = 75°$$

Искористићемо синусну теорему

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \rightarrow a = 2R\sin\alpha$$

$$a = 2 \cdot 2\sqrt{6}\sin 45°$$

$$a = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R \rightarrow b = 2R\sin\beta$$

$$b = 2 \cdot 2\sqrt{6}\sin 60°$$

$$b = 4\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$$

$$b = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \rightarrow c = 2R\sin\gamma$$

$$c = 2 \cdot 2\sqrt{6}\sin 75°$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot \sin(45° + 30°)$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot (\sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°)$$

$$c = 4\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$c = 2 \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right)$$

Задатак 10.8 Одредити страницу b троугла ABC ако су његове странице $a = 2\sqrt{3}\ cm, c = \sqrt{6}\ cm$ и угао $\beta = 105°$.

Решење:

Овде ћемо употребити косинусну теорему

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

Одредимо $\cos 105°$

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)}{4}$$

$$b^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{6}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)}{4}$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 \cdot \left(1 - \sqrt{3}\right)$$

$$b^2 = 12 + 6 - 6 + 6\sqrt{3}$$

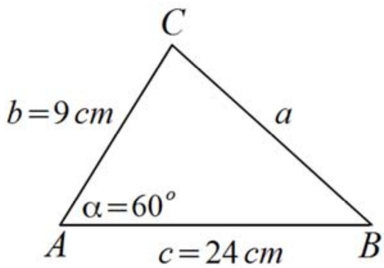
$$b^2 = 12 + 6\sqrt{3}$$

$b^2 = \left(3 + \sqrt{3}\right)^2$

$b = 3 + \sqrt{3}$

Задатак 10.9 У троуглу ABC дато је $AB = 24\ cm, AC = 9\ cm$ и угао $\alpha = 60°$. Одредити без употребе таблица, страницу BC и полупречник описане кружнице.

Решење:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$a^2 = 9^2 + 24^2 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \cos 60°$

$a^2 = 81 + 576 - 2 \cdot 9 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2}$

$a^2 = 441$

$a = \sqrt{441}$

$a = 21\ cm$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \rightarrow \frac{21}{\sin 60°} = 2R$

$\frac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$

$$2R = \frac{42}{\sqrt{3}}$$

$R = \frac{21}{\sqrt{3}}$ рационалишемо

$$R = \frac{21}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{21\sqrt{3}}{3}$$

$$R = 7\sqrt{3}\ cm$$

Задатак 10.10 У троуглу ABC разлика страница a и b једнака је 3 cm, угао $\gamma = 60°$ и полупречник описане кружнице $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}\ cm$. Одредити странице троугла ABC.

Решење:

Како је

$$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \rightarrow c = 2R\sin\gamma$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 60°$$

$$c = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c = 7\ cm$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$7^2 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\cos 60°$$

$$49 = (b+3)^2 + b^2 - 2b(b+3)\frac{1}{2}$$

$$49 = b^2 + 6b + 9 + b^2 - b^2 - 3b$$

$$b^2 + 3b - 40 = 0$$

$$b_{1/2} = \frac{-3 \pm 13}{2}$$

$$b_1 = 5$$

$b_2 = -8$ (ово није решење јер не може дужина странице да буде негативан број)

Дакле $b = 5$

$$a = b + 3$$

$$a = 5 + 3$$

$$a = 8\ cm$$

САДРЖАЈ