Технолошки факултет у Лесковцу 28.06.2011.

МАТЕМАТИКА

- пријемни испит -

1. Скратити разломак и записати услове под којима добијене једнакости важе.
$$\frac{x^3y - x^2y^2}{x^3y(x-y)}$$

2. Решити неједначину $4^x > 2^{\frac{x+1}{x}}$

3. Решити једначину $\log x + \log(x+3) = 1$

4. Нека је E средина странице AB квадрата ABCD. Одредити у којој размери дуж DE дели дијагоналу AC.

5. Одредити природан број ***n*** ако се зна да је збир $1+2+3+...+n$ троцифрен број чије су све цифре једнаке.

6. У једначини $kx^2-(2k+1)x+1=0$ одредити параметар k тако да је $x_1^2+x_2^2=3$.

Решења:

1. $$\frac{x^3y-x^2y^2}{x^3y(x-y)}=\frac{x^2y(x-y)}{x^3y(x-y)}=\frac{x^2y}{x^3y}=\frac{1}{x}\ ,\ x\neq 0,\ y\neq 0,\ x\neq y.$$

2. $x>0 \wedge x+3>0 \Rightarrow x>0$

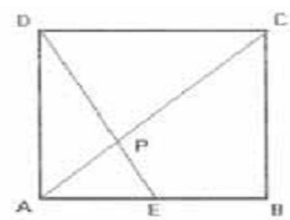
$$\log x(x+3)=1$$
$$x(x+3)=10 \Rightarrow x^2+3x-10=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{2}=\frac{-3\pm 7}{2}\Rightarrow x_1=2, x_2=-5$$

3. $4^x > 2^{\frac{x+1}{x}}$

$$2^{2x} > 2^{1+\frac{1}{x}} \Rightarrow 2x > 1+\frac{1}{x}$$
$$2x-1-\frac{1}{x}>0 \Rightarrow \frac{2x^2-x-1}{x}>0 \Rightarrow (2x^2\text{-}x\text{-}1>0 \wedge x>0) \vee (2x^2\text{-}x\text{-}1<0 \wedge x<0)$$
$$2x^2-x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}\Rightarrow x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$$

Rešenje nejednačine je $x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(1,+\infty)$

4. Neka je P presečna tačka duži DE i dijagonale AC. Trouglovi AEP i CDP su slični, odakle izlazi da je AP : CP = AE : CD = 1 : 2, jer je E sredina stranice kvadrata.




5. Zbir $n$ prirodnih brojeva iznosi $\frac{n}{2}(n+1)$. Kako je ovaj zbir jednak trocifrenom broju sa istim ciframa, dobijamo $\frac{n}{2}(n+1)=100m+10m+m=111m=3\cdot 37\cdot m$, tj. $n(n+1)=2\cdot 3\cdot 37\cdot m$ pri čemu $m\in\{1,2,3,\dots 9\}$. Na levoj strani ove jednakosti je proizvod dva uzastopna prirodna broja, pa mora biti i desna strana proizvod dva uzastopna prirodna broja, odakle zaključujemo da je $m=6$ jer je tada $2\cdot 3\cdot m=36$. Prema tome, $n=36$. Zaista, zbir prvih 36 prirodnih brojeva iznosi 666.

6. $$x_1+x_2=\frac{2k+1}{k} \quad \text{i} \quad x_1x_2=\frac{1}{k}$$

$$x_1^2+x_2^2=3\ ,\ (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=3\ ,\ \left(\frac{2k+1}{k}\right)^2-\frac{2}{k}=3$$

$$(2k+1)^2-2k-3k^2=0\ ,\ 4k^2+4k+1-2k-3k^2=0$$
$$k^2+2k+1=0\ ,\ (k+1)^2=0,\ k_{1,2}=-1.$$