ВИСОКА ЖЕЛЕЗНИЧКА ШКОЛА СТРУКОВНИХ СТУДИЈА У БЕОГРАДУ

29. јуни 2010.

МАТЕМАТИКА

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА СА ПРИЈЕМНОГ ИСПИТА

1. Израчунати $32^{0,4}+2\cdot 81^{0,75}+5\cdot 100^{0,5}$.

$$32^{0,4}+2\cdot 81^{0,75}+5\cdot 100^{0,5}=32^{\frac{2}{5}}+2\cdot 81^{\frac{3}{4}}+5\cdot 100^{\frac{1}{2}}=$$
$$=\left(2^5\right)^{\frac{2}{5}}+2\cdot\left(3^4\right)^{\frac{3}{4}}+5\cdot\left(10^2\right)^{\frac{1}{2}}=2^2+2\cdot\left(3^3\right)+5\cdot 10=4+54+50=108.$$

2. Одредити вредност реалног броја a тако да решења x_1 и x_2 једначине $x^2-(a+1)x+a+3=0$ задовољавају једнакост $(x_1-x_2)^2=4$

Из $(x_1-x_2)^2=4$

добијамо $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=4$ *или* $2x_1x_2+x_2^2=4+4x_1x_2$ *или*

$$(x_1+x_2)^2=4+4x_1x_2 \qquad (1)$$

Применом Вијетових формула имамо $x_1+x_2=a_1+1,\qquad x_1+x_2=a+3 \qquad (2)$

и сменом (2) *у* (1) *добијамо* $(a+1)^2=4+4(a+3)$ *или* $a^2-2a-15=0$

одакле је $a=\dfrac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}$ *или* $a=\dfrac{2\pm 8}{2}$ *па је* $a=5$ *или* $a=-3$.

3. Решити неједначину $\frac{3x-20}{x-5}<2.$

$$\frac{3x-20}{x-5}<2,\quad \frac{3x-20}{x-5}-2<0$$
$$\frac{3x-20-2x+10}{x-5}<0,\quad \frac{x-10}{x-5}<0 \quad na\ je$$
$$(x-10>0\wedge x-5<0)\vee(x-10<0\wedge x-5>0)$$
$$(x>10\wedge x<5)\vee(x<10\wedge x>5)\ na\ \ je\ 5<x<10$$

4. Решити једначину $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}+0.$

$$\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=0$$
$$\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\right)^2$$
$$2x+3=x+1+2\sqrt{(x+1)(x-2)}+x-2\ \wedge\ 2x+3\geq 0\wedge x+1\geq 0\wedge x-2\geq 0$$
$$4=2\sqrt{x^2-x-x}\ \wedge\ x\geq-\frac{3}{2}\ \wedge\ x\geq-1\ \wedge\ x\geq 2$$
$$2^2=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)^2\ \wedge\ x\geq 2$$
$$x^2-x-6=0\ \wedge\ x\geq 2$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2}\ \wedge\ x\geq 2 \qquad x=\frac{1\pm 5}{2}\ \wedge\ x\geq 2\ \ na\ \ je=3$$

5. Решити једначину $25\sqrt[2x]{0{,}2^x}=0{,}04\sqrt{5^x}.$

$$25\sqrt[2x]{0{,}2^x}=0{,}04\sqrt{5^x}$$
$$5^2\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{2x}}=\frac{1}{5^2}5^{\frac{x}{2}}$$
$$5^{2-\frac{7}{2x}}=5^{-2+\frac{x}{2}}$$
$$2-\frac{7}{2x}=-2+\frac{x}{2}$$
$$4x-7=-4x+x^2$$
$$x^2-8x+7=0$$
$$x=\frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2},\quad x=\frac{8+6}{2},\qquad x=7\ \vee\ x=1.$$

6. Израчунати $\log_6 216 - \log_{\frac{1}{3}} 81.$

$$\log_6 216 - \log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_6 216 - \log_{\sqrt{0,2}} 5 + \log_{\frac{1}{3}} 81 = \log_6 6^3 - \log_{\sqrt{5^{-1}}} 5 + \log_{3^{-1}} 3^4 =$$
$$= 3\log_6 6 - \log_{5^{-1}} 5 + \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^{-1}} = 3\cdot 1 - \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^{-1}} = 3\cdot 1 - \frac{\log_5 5}{\log_5 5^{-\frac{1}{2}}} + \frac{4\log_3 3}{-\log_3 3} =$$
$$= 3 - \frac{1}{-\frac{1}{2}\log_5 5} + \frac{4\cdot 1}{-1} = 3 + 2 - 4 = 1.$$

7. Израчунати запремину ваљка чија је површина $72\pi\, cm^2$ и висина $5\ cm.$

Површина ваљка $P = 2R\pi(R+H)$, *где је* R *полупречник основе ваљка и* H *висина ваљка.*
Како је $P = 72\pi cm^2$ *и* $H = 5\ cm$ *имамо да је* $72\pi = 2R\pi(R+5)$ *одакле је* $36 = R^2 + 5R$ *или*
$R = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2}$ *или* $R = \dfrac{-5 \pm 13}{2}$ *па је* $R = 4\ cm$ *и запремина ваљка је* $V = R^2\pi H = 4^2\pi\cdot 5$

$$V = 80\pi\, cm^2$$

8. Доказати да за $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi Z$ важи једнакост $\dfrac{\cos\alpha}{1-tg\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{ctg\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$

$$\frac{\cos\alpha}{1-tg\alpha} - \frac{\sin\alpha}{ctg\alpha-1} = \frac{\cos\alpha}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1} = \frac{\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}} - \frac{\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha}} =$$
$$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha} =$$
$$= \cos\alpha - \sin\alpha$$

9. Решити једначину $\sin x+\cos 2x=1$

$$\begin{aligned}
&\sin x+\cos 2x=1\\
&\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=1\\
&\sin x+1-\sin^2 x-\sin^2 x=1\\
&\sin x-2\sin^2 x=0\\
&\sin x(1-2\sin x)=0\\
&\sin x=0\vee \sin x=\frac{1}{2}\\
&x=k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}\vee x=\frac{5\pi}{6}+n\pi;\quad k,s,n\in \mathrm{Z}.
\end{aligned}$$

10. Написати једначину круга чији је пречник дуж $\overline{AB}$ ако је $A(2,1)$ и $B(8,9)$

Полупречник круга је $2R=AB=\sqrt{(8-2)^2+(9-1)^2}=10$, *па је полупречник* $R=5$.

Центар круга је средиште дужи AB и има координате $p=\dfrac{2+8}{5}$ *и* $q=\dfrac{1+9}{2}=5.$

Сменом $p=5,\ q=5$ *у једначини круга* $(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$ *добијамо тражену једначину круга* $(x-5)^2+(z-5)^2=25$ *или* $x^2+y^2-10x-10y+25=0.$