ВИСОКА ТЕХНИЧКА ШКОЛА- НИШ **02.07.2007.**

ПРИЈЕМНИ ИСПИТ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
СА РЕШЕЊИМА

Задатак 1.

Вредност израза $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}$ **једнака је:**

а) -1; **б)** $\sqrt{3}$; **в)** 1; **г)** $\sqrt{3}+3$; **д)** $\sqrt{3}+2$.

Решење:

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}+3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+3}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}=\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}+\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{3+2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\right)^{-1}=\frac{2\cdot(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})}=1$$

Одговор: в)

Задатак 2.

Упрошћен израз $\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)$ **има облик:**

а) $\frac{a+x}{1+x}$; **б)** $\frac{a}{x^3+1}$; **в)** a **г)** x **д)** 0.

Решење:

$$\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)=\frac{a(x+1)}{x^2-x+1}:\frac{x^2-x+1+3x}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{a\cdot(x+1)}{x^2-x+1}:\frac{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}{x^2+2x+1}=$$

$$=\frac{a\cdot(x+1)^2\cdot(x^2-x+1)}{(x^2-x+1)\cdot(x+1)^2}=a \qquad x\neq -1$$

Одговор: в)

Задатак 3.

Решења квадратне једначине $mx^2-(m+2)x+2=0$ **задовољавају неједнакост** $\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geq 3$ **за**

а) $m\in(-\infty,0)$ **б)** $m\in[3,\infty)$ **в)** $m\in[4,+\infty)$ **г)** $m\in[-4,4)$ **д)** $m\in(0,4)$

Решење:

На основу Виетових правила $x_1+x_2=\dfrac{m+2}{m}$ и $x_1\cdot x_2=\dfrac{2}{m}$ и $x_1,x_2\neq 0,\ m\neq 0$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}\geq 3 \Leftrightarrow \frac{\frac{m+2}{m}}{\frac{2}{m}}\geq 3$$

$$\frac{m+2}{2}\geq 3$$

$$\frac{m}{2}+1\geq 3$$

$$\frac{m}{2}\geq 2$$

$$m\geq 4$$

$$m\in[4,+\infty)$$

Одговор: в)

Задатак 4.

Збир решења једначине $\sqrt[x]{64}-5\cdot\sqrt[x]{2^{x+3}}+16=0$ **је:**

а) 10; **б) 3;** **в) 4;** **г) 5;** **д) 16.**

Решење:

Дата једначина еквивалентна је једначини

$$2^{\frac{6}{x}}-5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}}+16=0$$

$$\left(2^{\frac{3}{x}}\right)^2-5\cdot 2\cdot 2^{\frac{3}{x}}+16=0$$

Усвојене смене $2^{\frac{3}{x}}=t$ једначина се трансформише у $t^2-10t+16=0$ чија су решења $t_{1/2}=\dfrac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 16}}{2}=\dfrac{10\pm\sqrt{36}}{2}=\dfrac{10\pm 6}{2}$, $t_1=8$, $t_2=2$, заменом добијамо $2^{\frac{3}{x}}=8$ или $2^{\frac{3}{x}}=2$, односно $2^{\frac{3}{x}}=2^3$ или $2^{\frac{3}{x}}=2^1$ па је $\dfrac{3}{x}=3$ или $\dfrac{3}{x}=1$. Дакле $x_1=1$ и $x_2=3$. Отуда $x_1+x_2=1+3=4$.

Одговор: в)

Задатак 5.

Производ решења једначине $\log_x 3+\log_3 x=\log_{\sqrt{x}}3+\log_3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}$ **је:**

а) 9 **;** **б)** $\dfrac{1}{3}$**;** **в)** 3 **;** **г)** 27 **;** **д)** -2 **.**

Решење:

Нека је $x > 0$. Дата једначина еквивалентна је једначини $\frac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = \frac{2}{\log_3 x} + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{2}$.

Усвојене смене $\log_3 x = t$ једначина постаје $\frac{1}{t} + t = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$ чија су решења $t_1 = 2$ и $t_2 = -1$, па добијамо $\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 = 9$ или $\log_3 x = -1 \Leftrightarrow x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, односно $x_1 \cdot x_2 = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$.

Одговор: в)

Задатак 6.

Израз $\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x}$ **идентички је једнак:**

а) $\cos(x - \frac{\pi}{4})$; **б)** $\frac{\cos x + \sin x}{2}$; **в)** $\sin(x - \frac{\pi}{4})$; **г)** **1;** **д)** **0.**

Решење:

$$\frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{2 - \sin 2x} = \frac{(\cos x + \sin x)\cdot(\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x)}{2 - 2\cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{(\cos x + \sin x)\cdot(1 - \sin x \cdot \cos x)}{2(1 - \sin x \cdot \cos x)} =$$
$$= \frac{\cos x + \sin x}{2}.$$

Одговор: б)

Задатак 7.

У правоуглом троуглу једна катета је $8\,\mathrm{cm}$ **а друга је** $2\,\mathrm{cm}$ **краћа од хипотенузе. Површина тог троугла је:**

а) $40\,\mathrm{cm}^2$; **б)** $60\,\mathrm{cm}^2$; **в)** $80\,\mathrm{cm}^2$; **г)** $48cm^2$; **д)** $126cm^2$.

Решење:

Ако су a и b кататете, а c хипотенуза, онда је $a = 8\,\mathrm{cm}, b = c - 2$ применом Питагорине теореме

$$c^2 = (c-2)^2 + 8^2$$
$$c^2 = c^2 - 4\cdot c + 4 + 64$$
$$4\cdot c = 68$$
$$c = 17\,\mathrm{cm}.$$

Отуда $b = 17 - 2 = 15\,\mathrm{cm}$, па је

$$P = \frac{a\cdot b}{2}$$
$$P = \frac{8\cdot 15}{2}$$
$$P = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

Одговор: б)

Задатак 8.

У купи чији је осни пресек једнакостранични троугао уписана је лопта запремине $\frac{32}{3}\pi$. Запремина купе је:

а) 20π**;** **б)** 30π**;** **в)** 25π**;** **г)** 24π**;** **д) ниједан од ових одговора.**

Решење:

Нека је s изводница купе, r полупречник основе и H висина купе, а R полупречник лопте. Како је осни пресек једнакостраничан троугао, то је $2\cdot r = s$ и $H=\frac{s\cdot\sqrt{3}}{2}$ $R=\frac{1}{3}H$ тј. $R=\frac{s\cdot\sqrt{3}}{6}$. Запремина лопте је $V=\frac{4}{3}\cdot R^3\cdot\pi$, па је $\frac{32}{3}\pi=\frac{4}{3}R^3\pi$, одакле је $R=2$, онда је $2=\frac{s\cdot\sqrt{3}}{6}$ тј. $s=4\sqrt{3}$, а $r=\frac{s}{2}$, $r=2\cdot\sqrt{3}$, $H=6$. Запремина купе је

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot H$$
$$V=\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3\cdot\pi\cdot 6$$
$$V=24\pi.$$

Одговор: г)

Задатак 9.

Услов да права $kx-y+11=0$ додирује елипсу $3x^2+2y^2=11$ је да параметар k има вредности:

а) $k\pm 1$**;** **б)** $k\pm 11$**;** **в)** $k=0$**;** **г)** $k\pm\sqrt{\frac{63}{2}}$ **д) ниједан од ових одговора.**

Решење:

Права $y=kx+n$ додирује елипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ако је $a^2k^2+b^2=n^2$. Како се дата права може записати у облику $y=kx+11$ и елипса $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}+\frac{y^2}{\frac{11}{2}}=1$

то је

$$\frac{11}{3}\cdot k^2+\frac{11}{2}=11^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\cdot k^2+\frac{1}{2}=11$$
$$\frac{1}{3}\cdot k^2=\frac{21}{2}$$
$$k^2=\frac{63}{2}$$
$$k=\pm\sqrt{\frac{63}{2}}.$$

Одговор: г)

Задатак 10.

Тринаести члан аритметичког низа -2, -6, -10,... је:

а) 50; б) -50; в) -26; г) 100 д) ниједан од ових одговора.

Решење:

Како је $a_1 = -2$ и $d = -6 - (-2) = -4$, то је

$$a_{13} = a_1 + 12 \cdot d$$
$$a_{13} = -2 + 12 \cdot (-4)$$
$$a_{13} = -50.$$

Одговор: б)

Напомена:

- Сваки задатак вреднује се са по 6 поена.
- Само тачно заокружен одговор вреднује се 1,5 поена, а поступак израде задатка 4,5 поена.
- Испит траје два сата.
- Употреба мобилних телефона и дигитрона није дозвољено.
- Радити искључиво на печатираним лисовима школе.

У Нишу, 02.07.2007.год. **Испитна комисија**