FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA, NOVI SAD, 27.VI 2018.

REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE ZA UPIS NA STUDIJSKE PROGRAME:

Energetika, elektronika i telekomunikacije, Računarstvo i automatika, Primenjeno softversko inženjerstvo, Softversko inženjerstvo i informacione tehnologije, Informacioni inženjering, Inženjerstvo informacionih sistema, Merenje i regulacija, Biomedicinsko inženjerstvo i Mehatronika

1. Dati su kompleksni brojevi $z=i$, $w=-i$.

a) Izračunati $(-2+z-w)^{2018}$.

b) Ako su z **i** w **dva temena kvadrata, odrediti preostala dva temena. Koliko takvih kvadrata postoji?**

Rešenje: a) $(-2+z-w)^{2018}=(-2+2i)^{2018}=(2\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i})^{2018}=2^{3027}e^{\frac{3027\pi}{2}i}=2^{3027}(\cos\frac{3027\pi}{2}+i\sin\frac{3027\pi}{2})$
$=2^{3027}\left(\cos(1514\pi-\frac{\pi}{2})+i\sin(1514\pi-\frac{\pi}{2})\right)=2^{3027}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-2^{3027}i.$

b) Postoje tri takva kvadrata. Ukoliko su z i w naspramna temena traženog kvadrata, preostala dva temena su $z_1=1$, $z_2=-1$. Ukoliko su z i w susedna temena traženog kvadrata, preostala dva temena su $z_1=2-i$, $z_2=2+i$ ili $z_1=-2-i$, $z_2=-2+i$.

2. Data je jednačina $4x^2-2(a+1)x+a=0,\ a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. **Ako su** x_1 **i** x_2 **rešenja date jednačine, odrediti sve vrednosti parametra** a **za koje je**

a) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=1$, **b)** $x_1=x_2$.

Rešenje: a) Iz Vijetovih formula je $x_1+x_2=\frac{2(a+1)}{4}$ i $x_1x_2=\frac{a}{4}$, pa je $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=1\Leftrightarrow\frac{2a+2}{a}=1\Leftrightarrow a=-2$.

b) $x_1=x_2\Leftrightarrow D=4(a+1)^2-4\cdot4a=0\Leftrightarrow4a^2-8a+4=0\Leftrightarrow(a-1)^2=0\Leftrightarrow a=1$.

3. Odrediti sva rešenja sistema jednačina: $\begin{array}{rcl}4(4^{x-1}+1)&=&5\cdot2^x\\2^{\frac{x}{2}}+7^y&=&50\end{array}$.

Rešenje: $4(4^{x-1}+1)=5\cdot2^x\Leftrightarrow4^x+4-5\cdot2^x=0\Leftrightarrow t^2-5t+4=0\wedge2^x=t\Leftrightarrow(t=1\vee t=4)\wedge2^x=t$
$\Leftrightarrow2^x=1\vee2^x=4\Leftrightarrow x=0\vee x=2$. Uvrštavanjem $x=0$ u drugu jednačinu sistema dobija se $7^y=49$, tj. $y=2$. Uvrštavanjem $x=2$ u drugu jednačinu sistema dobija se $7^y=48$, tj. $y=\log_7 48$.
Dakle, skup rešenja datog sistema jednačina je $\{(0,2),(2,\log_7 48)\}$.

4. Odrediti sva rešenja jednačine $2+\log_2\sqrt{1+x}+3\log_2\sqrt{1-x}=\log_2\sqrt{1-x^2}$.
Rešenje: Jednačina je definisana za $1+x>0\wedge1-x>0\wedge1-x^2>0$, tj. $x\in(-1,1)$.

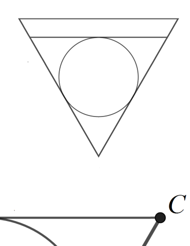
$$\begin{aligned}2+\log_2\sqrt{1+x}+3\log_2\sqrt{1-x}=\log_2\sqrt{1-x^2}&\Leftrightarrow 2+\log_2\sqrt{1+x}+3\log_2\sqrt{1-x}=\log_2\sqrt{1-x}+\log_2\sqrt{1+x}\\&\Leftrightarrow 2+2\log_2\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow\log_2\sqrt{1-x}=-1\\&\Leftrightarrow\sqrt{1-x}=2^{-1}\Leftrightarrow1-x=\tfrac14\Leftrightarrow x=\tfrac34.\end{aligned}$$

5. Odrediti sva rešenja jednačine $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$.
Rešenje: Zamenom $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ i $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ u datu jednačinu, uz uslov $\cos\frac{x}{2}\neq0$, dobija se

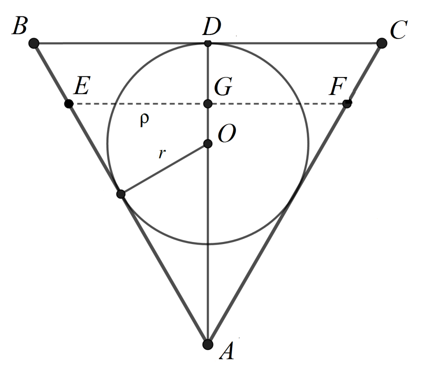
$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}&\Leftrightarrow\frac{\sin x}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\sin\frac{x}{2}\Leftrightarrow\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\&\Leftrightarrow2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}(1-\cos\frac{x}{2})=0\Leftrightarrow\sin\frac{x}{2}=0\vee\cos\frac{x}{2}=1.\end{aligned}$$

$\sin\frac{x}{2}=0$ za $\frac{x}{2}=k\pi$, tj. $x=2k\pi$, dok je $\cos\frac{x}{2}=1$ za $\frac{x}{2}=2k\pi$, tj. $x=4k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$. Konačno rešenje je $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

6. Prava kupa čiji je prečnik osnove jednak izvodnici postavljena je na vrh i u nju je stavljena lopta poluprečnika r. **Zatim je u kupu nalivena voda, taman toliko da prekrije loptu, tj. tako da je osni presek kao na slici. Računajući od vrha kupe, do kog nivoa** h **će se spustiti voda kada se lopta izvadi iz kupe?**



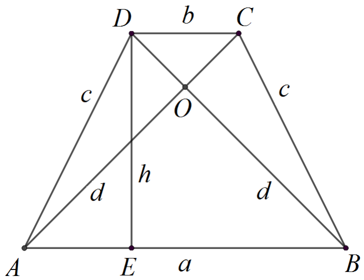
Rešenje: Osni presek kupe koja se dobija nalivanjem vode je jednakostranični trougao ABC. Duž $OA=2r$, pa je $AD=3r$. Iz pravouglog trougla ADB je poluprečnik osnove kupe $BD=r\sqrt{3}$.
Zapremine kupe i lopte su $V_K=\frac13\pi(BD)^2AD=3r^3\pi$, $V_L=\frac43r^3\pi$, redom. Telo koje se dobija nakon vađenja lopte je takođe kupa, čiji je osni presek jednakostranični trougao AEF. Zapremina novonastale kupe je $V=V_K-V_L=\frac53r^3\pi$. Označimo sa $\rho=EG$ i $h=AG$ poluprečnik i visinu nove kupe, redom. Iz trougla AEF je $\rho=\frac{h}{\sqrt3}$. Sada je $V=\frac13\rho^2\pi h=\frac13\frac{h^2}{3}\pi h=\frac53r^3\pi$, odakle je $h=r\sqrt[3]{15}$.



7. Dat je jednakokraki trapez čije se dijagonale seku pod pravim uglom, pri čemu su dužine odsečaka dijagonala u odnosu $3:1$. **Duža osnovica trapeza je** $a=6$.

a) Izračunati površinu datog trapeza. **b) Ispitati da li je dati trapez tangentni četvorougao.**

Rešenje:



a) Označimo temena trapeza sa A,B,C i D. Neka je presek dijagonala tačka O, a podnožje visine iz temena D tačka E. Neka je $AO=BO=3x$ i $CO=DO=x$. Iz pravouglog trougla ABO dobija se $(3x)^2+(3x)^2=36$, odakle je $x^2=2$, tj. $x=\sqrt{2}$.
I način: Dužina dijagonale trapeza $d=4x=4\sqrt{2}$ pa je površina datog trapeza $P=\frac{d^2}{2}=16$.

II način: Iz trougla CDO je $b^2=x^2+x^2=4$, tj. $b=2$. Kako je trougao ABO jednakokrako pravougli, sledi da je $\sphericalangle ABD=45^\circ$. Stoga je i trougao DEB jednakokrako pravougli pa je $d^2=h^2+h^2$, tj. $h=\frac{d\sqrt{2}}{2}=4$. Površina datog trapeza je $P=\frac{a+b}{2}h=4\cdot 4=16$.

b) Iz pravouglog trougla AOD je $c^2=x^2+(3x)^2=10x^2=20$ pa je $c=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$. Dakle, dati trapez nije tangentni jer je $a+b\neq 2c$ $(8\neq 4\sqrt{5})$.

8. Težište trougla ABC **poklapa se sa koordinatnim početkom. Koordinate tačaka** A **i** B **su** $A(6,0)$ **i** $B(0,-2)$. **Odrediti koordinate temena** C **i površinu trougla** ABC.

Rešenje: Koordinate temena $C(x_C,y_C)$ mogu da se odrede na dva načina.
I način: Koristeći formulu za koordinate težišta je $\frac{6+0+x_C}{3}=0$ i $\frac{0+(-2)+y_C}{3}=0$, odakle je $x_C=-6$ i $y_C=2$.
II način: Neka je $B_1(x_{B_1},y_{B_1})$ sredina stranice AC. Težište deli težišnu duž u odnosu 2:1, pa je $BT:TB_1=2:1$, odakle je $B_1(0,1)$. Iz $\frac{6+x_C}{2}=0$ i $\frac{0+y_C}{2}=1$ dobija se $x_C=-6$ i $y_C=2$.
Ako su $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$ i $C(x_C,y_C)$ temena trougla ABC, površina trougla ABC data je obrascem
$P=\frac{1}{2}|x_A(y_B-y_C)+x_B(y_C-y_A)+x_C(y_A-y_B)|$ i iznosi $P=\frac{1}{2}|6(-2-2)+0(2-0)+(-6)(0-(-2))|=\frac{1}{2}\cdot 36=18$.

Površina trougla ABC može da se izračuna i npr. kao
$P=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{1}{2}|(-6\vec{i}-2\vec{j})\times(-12\vec{i}+2\vec{j})|=\frac{1}{2}|(-36\vec{i}\times\vec{j})|=\frac{1}{2}\cdot 36|\vec{i}||\vec{j}|\sin\frac{\pi}{2}=18$.

9. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

a) Odrediti oblast definisanosti i nule funkcije $f(x)$.

b) Izračunati $\lim\limits_{x\to 1}\left((f(x))^2\cdot(x^2+x-2)\right)$.

c) Izračunati $\int x\cdot(f(x))^2dx$.

Rešenje: a) Oblast definisanosti: Funkcija je definisana za $x\neq 0\wedge 1-x\neq 0\wedge \frac{1+x}{1-x}\geq 0$, pa je $D_f=[-1,0)\cup(0,1)$.
Nule funkcije: $f(x)=0\Leftrightarrow 1+x=0\Leftrightarrow x=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2(x^2+x-2)\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2}\frac{1+x}{1-x}(x-1)(x+2)\right)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x^2}(1+x)(x+2)\right)=-6.$

c) $\int x\left(\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2dx=\int\frac{1+x}{x(1-x)}dx=\int\frac{(1-x)+2x}{x(1-x)}dx=\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{1-x}=\ln|x|-2\ln|1-x|+C.$

10. a) Na koliko različitih načina 8 osoba mogu da budu raspoređene u krug držeći se za ruke?

b) Na koliko različitih načina 4 devojke i 4 momka mogu da budu raspoređeni u krug držeći se za ruke tako da osobe istog pola ne budu jedna pored druge?

Rešenje: a) Ukupan broj načina je $\frac{8!}{8}=7!=5040$. **b)** Ukupan broj načina je $3!\cdot 4!=6\cdot 24=144$.

Svaki zadatak vredi maksimalno 6 bodova. **KATEDRA ZA MATEMATIKU**