Fakultet tehničkih nauka
Univerzitet u Novom Sadu 29. 6. 2018.

PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

Geodezija i geomatika, Saobraćaj i transport, Poštanski saobraćaj i telekomunikacije
Animacija u inženjerstvu, Čiste energetske tehnologije

1. **Ako su x_1 i x_2 rešenja kvadratne jednačine $(m^2+m)x^2-3x-24=0$, odrediti sve vrednosti realnog parametra m za koje je $x_1^2+x_2^2>0$.**

   Data jednačina je kvadratna ako je $m^2+m\neq 0$ tj. $m\neq 0$ i $m\neq -1$. Prema Vijetovim formulama, $x_1+x_2=\frac{3}{m^2+m}$ i $x_1x_2=-\frac{24}{m^2+m}$. Transformišimo zadati uslov na sledeći način:
   $$x_1^2+x_2^2>0 \Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2>0 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2>0.$$
   Zamenom izraza dobijenih pomoću Vijetovih formula zadati uslov se svodi na:
   $$\left(\frac{3}{m^2+m}\right)^2+2\frac{24}{m^2+m}>0 \Leftrightarrow 48m^2+48m+9>0 \Leftrightarrow (4m+1)(4m+3)>0.$$
   Odatle je $m\in(-\infty,-1)\cup(-1,-\frac{3}{4})\cup(-\frac{1}{4},0)\cup(0,\infty)$.

2. **Rešiti sistem jednačina** $\begin{array}{rcrcl} 3^x & + & 2^y & = & 17 \\ 9^x & - & 2^{y+1} & = & 65. \end{array}$

   Množenjem prve jednačine datog sistema sa 2 i dodavanjem drugoj dobijamo ekvivalentan sistem:
   $$\begin{array}{rcrcl} 3^x & + & 2^y & = & 17 \\ 2\cdot 3^x & + & 3^{2x} & = & 99. \end{array}$$
   Uvođenjem smene $t=3^x$ u jednačinu $2\cdot 3^x+3^{2x}=99$, dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2+2t-99=0$, čija rešenja su $t_1=9$ i $t_2=-11$. Kako je $t>0$, uzimamo rešenje $t=9$, tako da je $3^x=9$ i $2^y=8$, tj. $x=2$ i $y=3$.

3. **Rešiti jednačinu** $6\log_9 x-3\log_x 3=8$.

   Data jednačina je definisana za $x>0$ i $x\neq 1$. Kako je $\log_9 x=\log_{3^2}x=\frac{1}{2}\log_3 x$ i $\log_x 3=\frac{1}{\log_3 x}$, jednačinu možemo transformisati na sledeći način:
   $$6\log_9 x-3\log_x 3=8 \Leftrightarrow 3\log_3 x-\frac{3}{\log_3 x}=8 \Leftrightarrow 3\log_3^2 x-8\log_3 x-3=0.$$
   Uvođenjem smene $t=\log_3 x$ dobijamo kvadratnu jednačinu $3t^2-8t-3=0$ čija rešenja su $t_1=3$ i $t_2=-\frac{1}{3}$, odnosno $\log_3 x=3$ ili $\log_3 x=-\frac{1}{3}$, odakle su $x_1=27$ i $x_2=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ rešenja polazne jednačine.

4. **Rešiti jednačinu** $\sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=1$ **za** $x\in[0,\pi]$.
   $$\begin{aligned} \sin x+\cos^2 x-\sin^2 x=1 \ &\Leftrightarrow\ -2\sin^2 x+\sin x+1=1 \Leftrightarrow\ \sin x(-2\sin x+1)=0 \\ &\Leftrightarrow\ \sin x=0 \vee \sin x=\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$
   Kako $x\in[0,\pi]$, tražena rešenja su $x\in\{0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\pi\}$.

5. **Izračunati** $S=2\binom{6}{1}+2^2\binom{6}{2}+2^3\binom{6}{3}+2^4\binom{6}{4}+2^5\binom{6}{5}+2^6\binom{6}{6}$.

   Na osnovu binomnog obrasca, važi:
   $$2^0\binom{6}{0}+2\binom{6}{1}+2^2\binom{6}{2}+2^3\binom{6}{3}+2^4\binom{6}{4}+2^5\binom{6}{5}+2^6\binom{6}{6}=(1+2)^6=3^6,$$
   odakle je $S=3^6-1=728$.

6. **Zbir prva tri člana rastućeg geometrijskog niza je** 26. **Ako se tim brojevima dodaju redom** $1, 6$ **i** 3, **dobijaju se brojevi koji predstavljaju prva tri člana aritmetičkog niza. Odrediti prvih pet članova aritmetičkog i geometrijskog niza.**

   Neka su b, bq, bq^2 prva tri člana geometrijskog niza, a $b+1, bq+6$ i bq^2+3 prva tri člana aritmetičkog niza. Kako je drugi član aritmetičkog niza aritmetička sredina prvog i trećeg, imamo da je $2(bq+6) = b+1+bq^2+3$. Odatle dobijamo sledeći sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} b(1+q+q^2) & = & 26 \\ b(q^2-2q+1) & = & 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} b = \frac{26}{1+q+q^2} \\ \frac{26}{1+q+q^2} \cdot (q^2-2q+1) = 8 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} b = \frac{26}{1+q+q^2} \\ 3q^2-10q+3=0. \end{array}$$

   Rešenje kvadratne jednačine $3q^2 - 10q + 3 = 0$ je $q = 3$ ili $q = \frac{1}{3}$. Imajući u vidu da je dati geometrijski niz rastući, količnik je $q = 3$, a prvi član $b = 2$. Prvih pet članova geometrijskog niza su $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162$, dok su prvih pet članova aritmetičkog niza $3,\ 12,\ 21,\ 30,\ 39$.

7. **Prava** $2x + y - 4 = 0$ **seče parabolu** $y^2 = 4x$ **u tačkama** A **i** B. **Odrediti jednačine tangenti parabole u tačkama** A **i** B, **i njihovu presečnu tačku** C.

   Presek parabole i prave dobijamo rešavanjem sledećeg sistema jednačina:

$$\begin{array}{c} 2x+y=4 \\ y^2=4x \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} y=4-2x \\ (4-2x)^2=4x \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} y=4-2x \\ x^2-5x+4=0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} y=4-2x \\ x=1 \vee x=4, \end{array}$$

   odakle dobijamo presečne tačke $A(1,2)$ i $B(4,-4)$ prave i parabole.

   I način: Uvrštavanjem jednačine tangente $y = kx + n$ u $y^2 = 4x$ dobijamo kvadratnu jednačinu po x:

$$(kx+n)^2 \ = \ 4x \ \Leftrightarrow \ k^2x^2 + (2kn-4)x + n^2 = 0,$$

   pri čemu mora važiti $D = (2kn-4)^2 - 4k^2n^2 = 0 \Leftrightarrow nk = 1$ (da bi ta prava imala tačno jednu presečnu tačku sa parabolom). Uvrštavanjem koordinata tačke A u jednačinu tangente dobijamo $k + n = 2$, odakle uz uslov $nk = 1$, važi $k = 1,\ n = 1$. Tako smo dobili da je $y = x + 1$ jednačina tangente koja sadrži tačku A. Analogno za tačku B, iz uslova $nk = 1$ i $4k + n = -4$, dobijamo $k = -\frac{1}{2}, n = -2$, tj. $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

   II način: Datu parabolu obrazuju grafici funkcija $y = 2\sqrt{x}$ i $y = -2\sqrt{x}$, čiji izvodi su redom $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ i $y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$. Tačka A pripada grafiku funkcije $y = 2\sqrt{x}$, dok tačka B pripada grafiku funkcije $y = -2\sqrt{x}$. Jednačina tangente krive $y = 2\sqrt{x}$ u tački A je $y - 2 = y'(1)(x-1) \Leftrightarrow y = x + 1$, a u tački B je $y + 4 = y'(4)(x-4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2$.

   Presečnu tačku C dobijenih tangenti određujemo iz sistema jednačina

$$y = x+1 \qquad y = -\tfrac{1}{2}x - 2$$

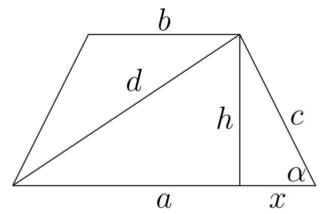
   odakle je $x = -2,\ y = -1$, tj. $C(-2,-1)$.

8. **Sinus oštrog ugla** α **na osnovici jednakokrakog trapeza površine** $P = 56\ \text{cm}^2$ **iznosi** $\sin\alpha = 0.8$, **a krak je dužine** $c = 5$ cm. **Izračunati dužinu dijagonale trapeza.**

   Neka su a i b osnovice, $x = \frac{a-b}{2}$, h visina i d dijagonala jednakokrakog trapeza prikazanog na slici. Primetimo da je $\sin\alpha = \frac{h}{c}$, odakle je $h = c \cdot \sin\alpha = 5 \cdot 0.8 = 4$ cm. Na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo da je $x = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, tj. $a - b = 6$.

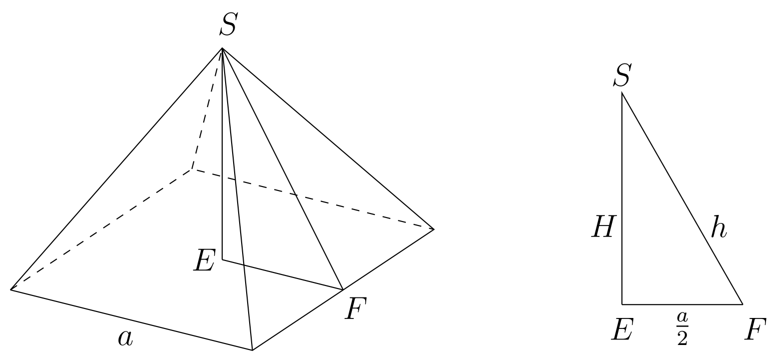
   Kako je površina trapeza $P = h \cdot \frac{a+b}{2} = 56\ \text{cm}^2$, dobijamo da je $a + b = 28$. Rešenje sistema jednačina $a + b = 28$ i $a - b = 6$ je $a = 17$ cm$, b = 11$ cm. Primenom Pitagorine teoreme dobijamo da je dužina dijagonale trapeza:

$$d^2 = (a-x)^2 + h^2 = 14^2 + 4^2 = 212 \Rightarrow d = \sqrt{212} = 2\sqrt{53} \text{ cm}.$$



9. **Data je visina bočne strane $h = \sqrt{6}$ cm jednakoivične četvorostrane piramide. Izračunati površinu P i zapreminu V piramide.**

Kako je bočna strana date piramide jednakostranični trougao sa osnovicom a, njena visina je $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, odakle je $a = 2\sqrt{2}$ cm. Ako dalje posmatramo pravougli trougao ΔSEF sa slike, gde je E presek dijagonala osnove i F sredina ivice osnove, primenom Pitagorine teoreme dobijamo da je $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4$, tj. $H = 2$ cm. Odatle je $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a^2H = \frac{16}{3}$ cm^3 i $P = B + M = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 8(1+\sqrt{3})$ cm^2.



10. **Data je funkcija $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} - x$.**

   (i) Odrediti domen funkcije f.

   (ii) Izračunati $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   (iii) Izračunati $f'(2)$, gde je f' prvi izvod funkcije f.

(i) Domen funkcije je: $x^2 + 6x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x+6) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -6] \cup [0, \infty)$.

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x} - x &= \lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+6x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2+6x}+x}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+6x-x^2}{\sqrt{x^2+6x}+x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1} = 3.\end{aligned}$$

(iii) Izvod funkcije f u tački x je $f'(x) = \dfrac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}} - 1$, što za $x = 2$ daje $f'(2) = \frac{1}{4}$.