FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD

ZADACI ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE
ZA STUDIJSKE PROGRAME: PROIZVODNO MAŠINSTVO, MEHANIZACIJA I KONSTRUKCIONO MAŠINSTVO, ENERGETIKA I PROCESNA TEHNIKA, TEHNIČKA MEHANIKA I DIZAJN U TEHNICI, INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO, INŽENJERSKI MENADŽMENT, INŽENJERSTVO ZAŠTITE ŽIVOTNE SREDINE, UPRAVLJANJE RIZIKOM OD KATASTROFALNIH DOGAĐAJA I POŽARA, INŽENJERSTVO ZAŠTITE NA RADU, GRAFIČKO INŽENJERSTVO I DIZAJN, GRAĐEVINARSTVO
28.06.2018.

1. **Rešiti jednačinu**
$$x^2+3|x|-4=0\,.$$

2. **Funkcije f i g su zadate sa**
$$f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}-4^{\frac{1}{x}} \quad \textbf{i} \quad g(x)=\frac{\log_2(x+1)}{\sqrt{x+2}}\,.$$
   (a) **Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije f i rešiti nejednačinu $f(x)>0$.**
   (b) **Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije g i rešiti jednačinu $g(x)=0$.**

3. **Data je jednačina**
$$(k+1)x^2+(k-2)x+k+1=0\,.$$
Odrediti vrednosti parametra $k\in\mathbb{R}$ za koje su rešenja date jednačine realna.

4. (a) **Pokazati da važi jednakost**
$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}\,,\quad \alpha\neq k\pi\,, k\in\mathbb{Z}\,.$$
   (b) **Rešiti jednačinu**
$$\sin 2x-\sin x=0\,.$$

5. **Odrediti zbir prvih šest članova aritmetičkog niza čiji je drugi član 5, a razlika četvrtog i devetog člana 10.**

Svaki zadatak vredi 6 bodova.

KATEDRA ZA MATEMATIKU

FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
NOVI SAD

REŠENJA ZADATAKA ZA PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE ZA STUDIJSKE PROGRAME: PROIZVODNO MAŠINSTVO, MEHANIZACIJA I KONSTRUKCIONO MAŠINSTVO, ENERGETIKA I PROCESNA TEHNIKA, TEHNIČKA MEHANIKA I DIZAJN U TEHNICI, INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO, INŽENJERSKI MENADŽMENT, INŽENJERSTVO ZAŠTITE ŽIVOTNE SREDINE, UPRAVLJANJE RIZIKOM OD KATASTROFALNIH DOGAĐAJA I POŽARA, INŽENJERSTVO ZAŠTITE NA RADU, GRAFIČKO INŽENJERSTVO I DIZAJN, GRAĐEVINARSTVO
28.06.2018.

1. **Rešiti jednačinu** $x^2+3|x|-4=0$.

   Za $x\geq 0$, jednačina je ekvivalentna sa $x^2+3x-4=0$ čija su rešenja $x_1=1$ i $x_2=-4$. Rešenje $x_2=-4$ se odbacuje jer ne zadovoljava uslov $x\geq 0$. Za $x<0$, jednačina je ekvivalentna sa $x^2-3x-4=0$ čija su rešenja $x_1=-1$ i $x_2=4$. Rešenje $x_2=4$ se odbacuje jer ne zadovoljava uslov $x<0$. Dakle, rešenja polazne jednačine su $x=1$ i $x=-1$.

2. **Funkcije f i g su zadate sa** $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}-4^{\frac{1}{x}}$ **i** $g(x)=\dfrac{\log_2(x+1)}{\sqrt{x+2}}$.

   (a) Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije f i rešiti nejednačinu $f(x)>0$.

   Funkcija f definisana je za $x-1\neq 0$ i $x\neq 0$ tj. za $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

   Za $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, nejednačina $f(x)>0$ je ekvivalentna sa $2^{\frac{1}{1-x}}>4^{\frac{1}{x}}$ tj. sa $2^{\frac{1}{1-x}}>2^{\frac{2}{x}}$ odnosno sa $\dfrac{1}{1-x}>\dfrac{2}{x}$. Ova nejednakost je ekvivalentna sa $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{x}>0$ tj. sa $\dfrac{3x-2}{x(1-x)}>0$, čije rešenje je $x\in(-\infty,0)\cup\left(\dfrac{2}{3},1\right)$.

   (b) Odrediti oblast definisanosti (domen) funkcije g i rešiti jednačinu $g(x)=0$.

   Funkcija g definisana je za $x+1>0$, $x+2\geq 0$ i $x+2\neq 0$ tj. za $x\in(-1,+\infty)$, $x\in[-2,+\infty)$ i $x\neq -2$ te je domen funkcije g skup $(-1,+\infty)$.

   Za $x\in(-1,+\infty)$, jednačina $g(x)=0$ je ekvivalentna sa $\log_2(x+1)=0$, čije je rešenje $x=0$.

3. **Data je jednačina $(k+1)x^2+(k-2)x+k+1=0$. Odrediti vrednosti parametra $k\in\mathbb{R}$ za koje su rešenja date jednačine realna.**

   Za $k\neq -1$, data jednačina je kvadratna i njena rešenja su realna za one vrednosti parametra k za koje je diskriminanta $D\geq 0$. Kako je $D=(k-2)^2-4(k+1)(k+1)$ rešavanjem kvadratne nejednačine $-3k^2-12k\geq 0$, dobijamo da $k\in[-4,-1)\cup(-1,0]$. Za $k=-1$ jednačina je linearna i ima jedno realno rešenje. Dakle, za $k\in[-4,0]$ data jednačina ima realna rešenja.

4. **(a) Pokazati da važi jednakost** $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$, $\alpha\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

   $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha+1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=\frac{2}{\sin\alpha}.$$

   (b) Rešiti jednačinu $\sin 2x-\sin x=0$.

   Polazna jednačina je ekvivalentna sa $2\sin x\cdot\cos x-\sin x=0$, odnosno sa $(2\cos x-1)\sin x=0$. Ova jednakost je zadovoljena za $\cos x=\dfrac{1}{2}$ ili $\sin x=0$. Skup rešenja jednačine je $\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.

5. **Odrediti zbir prvih šest članova aritmetičkog niza čiji je drugi član 5, a razlika četvrtog i devetog člana 10.**

   Drugi, četvrti i deveti član aritmetičkog niza čiji je prvi član a_1 i razlika d, iznose redom $a_2=a_1+d$, $a_4=a_1+3d$ i $a_9=a_1+8d$. Iz $a_4-a_9=10$ sledi da je $-5d=10$, te je $d=-2$. Dalje, iz $a_2=5$ sledi da je $a_1=7$. Zbir prvih šest članova aritmetičkog niza jednak je $S_6=\dfrac{6}{2}(2\cdot 7+5\cdot(-2))=12$.