Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad 29.06.2018.

REŠENJA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

za upis na osnovne strukovne studije na studijskim programima:
- ***Elektroenergetika - obnovljivi izvori električne energije,***
- ***Elektronika i telekomunikacije,***
- ***Softverske i informacione tehnologije.***

1. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+3}$**.**

(a) Odrediti domen funkcije f **i izračunati** $f(0)$**.**

(b) Na skupu realnih brojeva rešiti jednačinu $f(x) = 0$**.**

(c) Na skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu $f(x) > 1$**.**

Rešenje:

(a) Domen funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, i $f(0) = -\frac{1}{3}$.

(b) $f(x) = 0 \iff \frac{4x-1}{x+3} = 0 \iff 4x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{4}$.

(c) $f(x) > 1 \iff \frac{4x-1}{x+3} > 1 \iff \frac{4x-1}{x+3} - 1 > 0 \iff \frac{4x-1-x-3}{x+3} > 0 \iff \frac{3x-4}{x+3} > 0$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, \frac{4}{3})$	$(\frac{4}{3}, \infty)$
$3x-4$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

Iz tabele vidimo da su rešenja nejednačine $(-\infty, -3) \cup \left(\dfrac{4}{3}, \infty\right)$.

2. Data je kvadratna jednačina $x^2 - (2-m)\,x + 4 = 0$**,** $m \in \mathbb{R}$**. Odrediti vrednosti realnog parametra** m **za koje rešenja date jednačine ne pripadaju skupu** $\mathbb{R}$**.**

Rešenje: Rešenja kvadratne jednačine ne pripadaju skupu $\mathbb{R}$ za

$$D = (-(2-m))^2 - 4 \cdot 4 = m^2 - 4m - 12 < 0.$$

Rešenja jednačine $m^2 - 4m - 12 = 0$ su $m_1 = -2$ i $m_2 = 6$ i $a = 1 > 0$ pa sledi da $m \in (-2, 6)$.

3. (a) Na skupu realnih brojeva rešiti jednačinu

$$\log_2 x - \sqrt{\log_2 x} - 2 = 0.$$

(b) Na skupu realnih brojeva rešiti nejednačinu

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} \geq 1.$$

Rešenje:

(a) Jednačina $\log_2 x - \sqrt{\log_2 x} - 2 = 0$ definisana je za $x > 0$ i $\log_2 x \geq 0$. Kako je $\log_2 x \geq 0$ za $x \geq 1$ to znači da rešenje jednačine tražimo na intervalu $[1, \infty)$. Nakon uvođenja smene $\sqrt{\log_2 x} = t$, $t \geq 0$ polazna jednačina se svodi na kvadratnu jednačinu $t^2 - t - 2 = 0$, sa rešenjima $t_1 = -1$ i $t_2 = 2$. Rešenje $t_1 = -1$ se odbacuje jer mora biti $t \geq 0$ a iz rešenja $t = 2$ sledi da je $\sqrt{\log_2 x} = 2$, pa je $\log_2 x = 4$. Odavde je sad jedino rešenje jednačine $x = 2^4$, tj. $x = 16$.

(b) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} \geq 1 \iff \left(\frac{1}{7}\right)^{x-5} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{0}$. Kako je $\frac{1}{7} < 1$, zaključujemo da mora biti $x - 5 \leq 0$, tj. da je rešenje početne nejednačine $x \in (-\infty, 5]$.

4. Data je funkcija $f(x) = \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x)$.

(a) Na intervalu $[0, \pi)$ rešiti jednačinu $f(x) = 0$.

(b) Izračunati $f\left(\frac{16\pi}{3}\right)$.

Rešenje:

(a) *Prvi način:* Korišćenjem adicionih formula $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ i $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ dobijamo

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 \iff & \sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) = 0 \\
\iff & \sin x \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) + \cos x \left(2 \sin x \cos x\right) = 0 \\
\iff & \sin x \cos^2 x - \sin^3 x + 2 \sin x \cos^2 x = 0 \\
\iff & 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x = 0 \\
\iff & \sin x \left(3 \cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0 \\
\iff & \sin x \left(4 \cos^2 x - 1\right) = 0 \\
\iff & \sin x = 0 \ \vee \ 4 \cos^2 x = 1 \\
\iff & \sin x = 0 \ \vee \ \cos x = \pm\tfrac{1}{2} \\
\iff & x = k\pi \ \vee \ x = \pm\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ x = \pm\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Kako je potrebno pronaći samo ona rešenja koja se nalaze na intervalu $[0, \pi)$ to sledi da je skup rešenja date jednačine $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Drugi način: Kako je $\sin x \cos(2x) + \cos x \sin(2x) = \sin(x + 2x) = \sin(3x)$ sledi da je

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 \iff & \sin(3x) = 0 \\
\iff & 3x = k\pi \\
\iff & x = \tfrac{k\pi}{3}, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Prema tome skup rešenja na intervalu $[0, \pi)$ je $\left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin\left(\frac{16\pi}{3}\right)\cos\left(2\frac{16\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{16\pi}{3}\right)\sin\left(2\frac{16\pi}{3}\right)\\ &= \sin\left(\frac{4\pi}{3}+4\pi\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+10\pi\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+4\pi\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+10\pi\right)\\ &= \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0. \end{aligned}$$

5. **Dat je paralelogram $ABCD$. Neka je tačka O presek njegovih dijagonala, tačka M sredina stranice AB a tačka N sredina stranice BC. Pomoću vektora $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$ izraziti vektore $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ i $\overrightarrow{MN}$.**

   Rešenje: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$,
   $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$,
   $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$,
   $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$,
   $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}-\frac{1}{2}\overrightarrow{a}=-\overrightarrow{a}$.

6. **Izračunati dužine stranica a, b i c pravouglog trougla ako se zna da one čine aritmetičku progresiju sa razlikom 3.**

   Rešenje: Neka su a i b katete a c hipotenuza pravouglog trougla. Na osnovu Pitagorine teoreme imamo da je $c^2=a^2+b^2$. Kako a, b i c čine aritmetičku progresiju sa razlikom 3 sledi da je $b=a+3$ i $c=a+6$. Jednostavnim uvrštavanjem dobijamo da je $(a+6)^2=a^2+(a+3)^2$, odakle nakon sređivanja dobijamo kvadratnu jednačinu $-a^2+6a+27=0$, čija su rešenja $a_1=-3$ i $a_2=9$. Rešenje $a=-3$ odbacujemo jer dužina stranice trougla ne može biti negativna pa dobijamo da su tražene stranice 9, 12 i 15.

7. **Visina prave pravilne četvorostrane piramide je $7cm$, a zapremina $70cm^3$. Odrediti dužinu bočne ivice te piramide.**

   Rešenje: Neka je $H=7cm$ visina piramide a $V=70cm^3$ zapremina piramide. Kako je zapremina prave pravilne četvorostrane piramide $V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}a^2H$, gde je a stranica kvadrata koji se nalazi u osnovi piramide, dobijamo da je $B=30$, tj. $a=\sqrt{30}$. Dijagonala tog kvadrata je $d=\sqrt{2}a$, tj. $d=\sqrt{60}$. Bočnu ivicu piramide b sada možemo izračunati na osnovu Pitagorine teoreme primenjene na trougao čija je hipotenuza tražena ivica b a katete su mu H i $\frac{d}{2}$. Dakle, $b^2=H^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2$, pa je $b=8cm$.

8. **Date su parabola $y=x^2+a$, $a\in\mathbb{R}$ i prava $y=2x-3$.**

   (a) **Odrediti sve vrednosti parametra a tako da parabola i prava imaju dve zajedničke tačke.**

   (b) **Za $a=-6$ naći presečne tačke parabole i prave.**

Rešenje:

(a) Prava i parabola imaju dve zajedničke tačke ako i samo ako sistem formiran od njihovih jednačina ima dva različita rešenja. Izjednačavanjem desnih strana jednačina $y = x^2 + a$ i $y = 2x - 3$ dobijamo kvadratnu jednačinu $x^2 - 2x + a + 3 = 0$. Ova kvadratna jednačina će imati dva različita realna rešenja ako je $D = (-2)^2 - 4(a+3) = -4a - 8 > 0$. Odavde sledi da mora biti $a < -2$, tj. $a \in (-\infty, -2)$.

(b) Za $a = -6$ dobijamo parabolu $y = x^2 - 6$. Rešavanjem jednačine $x^2 - 2x - 3 = 0$ dobićemo apscise traženih presečnih tačaka. Kako je $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$, tražene tačke su $T_1(-1, -5)$ i $T_2(3, 3)$.

9. U razvoju binoma $\left(x\sqrt[4]{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^{13}$ odrediti onaj član razvoja koji ne sadrži x.

Rešenje: Kako je

$$\left(x\sqrt[4]{x^3} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} \left(x\sqrt[4]{x^3}\right)^k \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^{13-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} x^{\frac{7}{4}k} \cdot x^{-\frac{3}{2}(13-k)} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} x^{\frac{13}{4}k - \frac{39}{2}}$$

to da bi odredili član koji ne sadrži x moramo uzeti da je $\frac{13}{4}k - \frac{39}{2} = 0$, tj. da je $k = 6$. Traženi član je $\binom{13}{6} = \dfrac{13!}{7! \cdot 6!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$.

10. Dat je kompleksan broj $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Naći $|z|$, $z + \overline{z}$ i z^3.

Rešenje: Kako je $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, to je

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$z + \overline{z} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1,$$

$$z^3 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$= -\frac{1}{8} + i\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8} - i\frac{3\sqrt{3}}{8} = 1.$$