Prijemni Ispit iz Matematike Jun 2017

1. Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{(a+b)^2-2ab}{(a-b)^2+2ab}=\frac{b+a}{b-a}, \qquad ab(a-b)\neq 0.$$

2. Rešiti jednačinu

$$9^{-x+\frac{1}{2}}-26\cdot 3^{-x}-9=0.$$

3. Rešiti jednačinu

$$x^{\log_3^2 x+\log_3 x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\log_9 x+\log_{81} x+\log_3 x=7.$$

5. Proveriti tačnost jednakosti

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

6. Ako je

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}, \qquad x(x-1)\neq 0,$$

odrediti $f(f(x))$.

1.
$$\left[\frac{a+b}{ab}:\frac{b-a}{ab}\right]:\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}.$$

2. Kako je $9^{-x}\cdot 9^{\frac{1}{2}}-26\cdot 3^{-x}-9=0$, uvodjenjem smene $t=3^{-x}$ dobija se kvadratna jednačina $3t^2-26t-9=0$. Rešenja ove jednačine su $t_1=(26\pm\sqrt{784})/6$, $t_{1,2}=-\frac{1}{3}$ i $t_2=9$. Stepen ne može biti negativan, tako da je $3^{-x}=9$, odnosno jedino rešenje je $x=-2$.
3. Posle sredjivanja se dobija

$$x^{\log_3^2 x+3\log_3 x+3}=x.$$

Skup dopustivih vrednosti x je $(0,+\infty)$. Jedno rešenje je $x=1$. Druga rešenja se dobijaju iz jednačine

$$\log_3^2 x+3\log_3 x+2=0.$$

To su brojevi $x=\frac{1}{3}$ i $x=\frac{1}{9}$.
4.
$$\begin{aligned}\log_{3^2}x+\log_{3^4}x+\log_3 x&=7\\ \tfrac{1}{2}\log_3 x+\tfrac{1}{4}\log_3 x+\log_3 x&=7\\ \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+1\right)\log_3 x&=7\end{aligned}$$

$$\frac{2+1+4}{4}\log_3 x=7,\qquad \log_3 x=4,\quad x=3^4,\quad x=81.$$

5. Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$\begin{aligned}I&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha\\ &=-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=-\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{4}=-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.\end{aligned}$$

6. Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x)=\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1}=\frac{x+1}{x-1}.$$

Tako je

$$f(f(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}}=x.$$

Kako je $f(f(x))=x$ identička funkcija, to znači da je $f=f^{-1}$ funkcija jednaka svojoj inverznoj funkciji.

2017. Jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

1. Izračunati
$$\frac{2^{-4}-3^{-4}}{2^{-1}-3^{-1}}\cdot(2^{-1}+3^{-1})^{-1}.$$

2. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{1}{a-5b}-\frac{1}{a+5b}+\frac{10b}{a^2-25b^2}\right):\frac{b(2a+b)}{a^2-25b^2}.$$

3. Rešiti jednačinu
$$\log_{x+1}(2x^2-3x+7)-2=0.$$

1.

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{9} = \frac{13}{18}.
\end{aligned}
$$

2. Transformacije daju

$$\frac{a+5b-a+5b+10b}{a^2-25b^2} \cdot \frac{a^2-25b^2}{b(2a+b)} = \frac{20}{2a+b}.$$

3. Najpre je $\log_{x+1}(2x^2-3x+7)=2$. Prema definiciji logaritma dobija se

$$2x^2-3x+7=(x+1)^2, \quad x^2-5x+6=0, \qquad x_1=2, \quad x_2=3.$$

Logaritam je definisan samo za pozitivnu vrednost numerusa, što je ispunjeno.