Univerzitet u Novom Sadu Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin"

Prijemni Ispit iz Matematike Jun 2012

1. Uprostiti izraz
$$\left(\frac{x^3}{x^4-x}-\frac{1}{x-1}\right):\frac{x+1}{x^3-1}.$$

2. Uprostiti

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

3. Odrediti zbir kvadrata rešenja jednačine

$$2^{x^2-2x-10}=\frac{1}{4}.$$

4. Rešiti jednačinu

$$\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{1/2} x=2.$$

5. Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}+\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=3.$$

(1) Ako je I dati izraz, tada je

$$I = \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^3 - 1}{x+1} = -1.$$

(2)

$$I = \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y - (x + 2\sqrt{xy} + y)} = \frac{2\sqrt{x+y}}{-2\sqrt{xy}} = -\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

(3) Kako je $1/4 = 2^{-2}$, iz date jednačine izlazi

$$x^2 - 2x - 10 = -2, \qquad x^2 - 2x - 8 = 0, \qquad (x-4)(x+2) = 0.$$

Rešenja su $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$, tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 20$.

(4) Korišćenjem formule $\log_b a = \log_2 a / \log_2 b$ mogu se izjednačiti osnove logaritama. Jednostavniji postupak sledi iz obrasca $\log_{b^n} a = \frac{1}{n} \log_b a$

$$4\log_2^2 x + 3\log_2 x - \log_2 x = 2, \qquad 2\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednačina ima dva rešenja

$$\log_2 x = -1, \quad x_1 = \frac{1}{2}; \qquad \log_2 x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

(5)

$$\begin{aligned}
L &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} \\
&\quad + \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x} \\
&\quad + \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\
&= 1 - \sin x \cos x + 1 + \sin x \cos x + 1 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Prijemni Ispit iz Matematike Jun 2012

1. Izračunati
$$\left(\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)\right)^{-1/2}.$$

2. Odrediti zbir kvadrata rešenja kvadratne jednačine

$$x^2+3\alpha x+\alpha^2=0,$$

gde je α parametar.

3. Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}=\frac{\cos x+\sin x}{2}.$$

(1)

$$I = \left(\left(\frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}\right) : \frac{97}{7}\right)^{-1/2} = \left(\frac{27+70}{63} \cdot \frac{7}{97}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2} = 9^{1/2} = 3.$$

(2) Za korene kvadratne jednačine $x^2 + px + q = 0$ važe Vietove formule $x_1 + x_2 = -p$ i $x_1 x_2 = q$. Tako je $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$. U našem slučaju je $x_1^2 + x_2^2 = 9\alpha^2 - 2\alpha^2 = 7\alpha^2$.

(3)

$$\frac{(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x)}{2 - 2\sin x \cos x} = \frac{\cos x + \sin x}{2}.$$