Univerzitet u Nišu, Prirodno-matematički fakultet
Prijemni ispit za upis OAS Matematika
Rešenja zadataka

---

1. Matematičkom indukcijom dokazati da za svaki prirodan broj n važi jednakost:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Rešenje. Neka je za svaki prirodan broj n: $S_n = 1^3 + \cdots + n^3$ i $T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Ako je $n = 1$, onda je $S_1 = 1 = T_1$. Pretpostavimo da je $S_n = T_n$ za neki prirodan broj n. Tada je

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)^3 = T_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{2^2} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{2^2} = T_{n+1}. \end{aligned}$$

Na taj način tvrđenje je dokazano matematičkom indukcijom.

2. Peti član aritmetičkog niza jednak je 19, a deseti član tog niza jednak je 39. Odrediti dvadeseti član pomenutog aritmetičkog niza.

Rešenje. Neka je a_1 prvi član aritmetičkog niza, i neka je d razlika tog niza. Tada za svaki prirodan broj n važi $a_n = a_1 + (n-1)d$. Prema uslovima zadatka, ispunjeno je $19 = a_5 = a_1 + 4d$ i $39 = a_1 + 9d$. Sledi da je $5d = 20$, odnosto $d = 4$ i $a_1 = 3$. Stoga je $a_{20} = a_1 + 19d = 79$.

3. Odrediti broj a tako da rešenja x_1 i x_2 kvadratne jednačine $2x^2 - 12x + a = 0$ zadovoljavaju uslov $x_1^2 = x_2$.

Rešenje. Na osnovu Vietovih formula važi $x_1 + x_2 = 6$ i $x_1 x_2 = \frac{a}{2}$. Imajući u vidu $x_1^2 = x_2$, proizilazi da je $a = 2x_1^3$ i $x_1^2 + x_1 - 6 = 0$. Iz poslednjeg uslova sledi da je $x_1 = 2$ ili $x_1 = -3$. Stoga postoje dva rešenja: $a = 16$ ili $a = -54$.

4. Rešiti nejednačinu $\dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 1} < 0$.

Rešenje. Važi $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$, te rešavamo nejednačinu $\dfrac{(x+2)(x+3)}{x+1} < 0$. Jednostavno sledi rezultat $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1)$.

5. Rešiti jednačinu $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

Rešenje. Iskoristimo poznatu formulu $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Tada polazna jednačina postaje

$$(1-\operatorname{tg} x)\left(1+\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) = 1+\operatorname{tg} x,$$

što je ekvivaletno sa

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x)^2 = (1+\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg}^2 x).$$

Ako je $1+\operatorname{tg} x = 0$, onda je prethodna jednačina trivijalno ispunjena. Stoga iz $\operatorname{tg} x = -1$ proizilazi jedno rešenje polazne jednačine, i to $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Ako je $1+\operatorname{tg} x \neq 0$, onda polaznu jednačinu skratimo sa $1+\operatorname{tg} x$, te sledi

$$(1-\operatorname{tg} x)(1+\operatorname{tg} x) = 1+\operatorname{tg}^2 x,$$

odnosno $\operatorname{tg} x = 0$. Sledi da je drugo rešenje polazne jednačine $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

6. Izračunati $\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{20}$.

Rešenje. Neka je $z = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$. Tada je $|z| = 2$ i argumet broja z jeste $\frac{3\pi}{4}$. Prema tome, $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$. Na osnovu Moavrove formule sledi

$$z^{20} = 2^{20}\Big(\cos(20\frac{3\pi}{4}) + i\sin(20\frac{3\pi}{4})\Big) = 2^{20}(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = -2^{20}.$$

7. Rešiti jednačinu $4^{x-1} - 2^{x-2} = 3$.

Rešenje. Polazna jednačina jeste $\frac{1}{4}4^x - \frac{1}{4}2^x - 3 = 0$, što je ekvivalento sa $(2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$. Ako je $2^x = t$, onda dolazimo kvadratne jednačine $t^2 - t - 12 = 0$, čija rešenja jesu $t_1 = 4$ i $t_2 = -3$. Kako je $t = 2^x > 0$, sledi da mogućnost $t_2 = -3$ otpada. Preostaje $2^x = t_1 = 4$, te je $x = 2$ jedino rešenje polazne jednažine.

8. Izračunati površinu jednakokrakog trougla, ako je visina koja odgovara osnovici jednaka 20, a visina koja odgovara kraku jednaka 24.

Rešenje. Neka je AB osnovica, a C neka je vrh polaznog jednakokarkog trougla $\triangle ABC$. Podnožje visine trougla $\triangle ABC$ iz temena C na AB neka je tačka D, a E neka je podnožje visine trougla $\triangle ABC$ iz temena A na BC. Neka je $\overline{AB} = c$ i $\overline{BC} = a$. Tada je $\overline{BD} = \frac{c}{2}$. Prema uslovima zadatka važi $\overline{CD} = 20$ i $\overline{AE} = 24$. Ako je P površina trougla $\triangle ABC$ onda je $2P = 20c = 24a$, odakle sledi $c = \frac{6}{5}a$. Stoga je $\overline{BD} = \frac{3}{5}a$. Primena Pitagorine teoreme na trougao $\triangle BCD$ dovodi do jednačine $400 + \frac{9}{25}a^2 = a^2$, odakle je $a = 25$. Stoga je površina trougla $\triangle ABC$ jednaka $P = 300$.

9. Izračunati površinu pravilne šestostrane piramide, koja ima visinu 8 i čiji je veći dijagonalni presek površine 64.

Rešenje. Osnova pravilne šestostrane piramide jeste pravilan šestougao, čija je stranica jednaka a. Ovaj šestougao se sastoji od 6 jednakostraničnih trouglova stranice a sa jednim zajedničkim temenom O. Svaki od ovih jednakostraničnih trouglova ima svoju visinu $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Ako je sa S označen vrh piramide, tada je SO visina piramide. Prema uslovu zadatka važi $\overline{SO} = 8$. Veći dijagonalni presek piramide jeste jednakoraki trougao, čija osnovica jeste $2a$, a visina je 8. Stoga je $a = 8$ i $h_1 = 4\sqrt{3}$. Bočna strana piramide je jednakokraki trougao sa osnovom a i visinom h_2. Primetimo da možemo odabrati visine h_1 i h_2 tako da duži h_1, h_2, SO čine pravougli trougao sa hipotenuzom h_2. Primenom Pitagorine teoreme na ovaj trougao nalazimo da je $h_2 = 4\sqrt{7}$. Stoga je površina jednog jednakokrakog trougla u omotaču piramide jednaka $P_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$. Površina osnove se sastoji od 6 jednakostraničnih trouglova od kojih svaki ima površinu jednaku $P_2 = 16\sqrt{3}$. Stoga je površina piramide jednaka $P = 6P_1 + 6P_2 = 96\sqrt{7} + 96\sqrt{3}$.

10. Temena osnovice jednakokrakog trougla su $A(-2, 2)$ i $B(4, 8)$, a dužina kraka trougla iznosi $5\sqrt{2}$. Naći koordinate trećeg temena C trougla.

Rešenje. Jednačina prave p kroz tačke $A(-2, 2)$ i $B(4, 8)$, jeste $\dfrac{x+2}{4+2} = \dfrac{y-2}{8-2}$, odnosno $y = x + 4$. Sredina duži AB neka je tačka D. Tada D ima koordinate $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (1, 5)$. Svaka prava h normalna na p mora imati koeficijent pravca jednak -1 (uslov normalnosti pravih sa koeficijentima pravaca k_1 i k_2 jeste $k_1k_2 = -1$). Visina traženog jednokrakog trougla leži na pravoj h koja ima jednačinu $y = -x + n$ i koja prolazi kroz tačku $D(1, 5)$. Jednostavno utvrđujemo da je $n = 6$, odnosno visina jednakokrakog trougla leži na pravoj h čija je jednačina $y = -x + 6$.

Posmatramo kružnicu κ sa centrom u tački $A(-2, 2)$ poluprečnika $5\sqrt{2}$. Jednačina kružnice κ jeste $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 50$. Tražena tačka C jeste u preseku kružnice κ i prave h. Stoga rešavamo sistem jednačina

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 50, \quad y = -x + 6.$$

Rešenja ove jednačine jesu $x_1 = 5$ i $x_2 = -3$. Postoje dve mogućnosti za tačku C, i to su: $C_1(5, 1)$ i $C_2(-3, 9)$.

Izrada zadataka traje 150 minuta.
Svaki tačno urađen zadatak nosi 6 poena.