FAKULTET ZAŠTITE NA RADU

REŠENJA ZADATAKA SA PRIJEMNOG ISPITA IZ MATEMATIKE

Niš, 13.7.2017.

1. Uprostiti izraz

$$\left(\frac{x}{xy+y^2}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)=?$$

Rešenje.

$$\left(\frac{x}{xy+y^2}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x^2+xy}\right):\left(\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}\right)=$$

$$\left(\frac{x}{y(x+y)}-\frac{2}{x+y}+\frac{y}{x(x+y)}\right):\frac{x^2-2xy+y^2}{xy}=$$

$$\frac{x^2-2xy+y^2}{xy(x+y)}\cdot\frac{xy}{x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{x+y}.$$

2. Rešiti sistem jednačina

$y=2x-3$

$2x^2-y^2+3x-4y=9.$

Rešenje.

$y=2x-3$

$\underline{2x^2-y^2+3x-4y=9}$

$y=2x-3$

$\underline{2x^2-(2x-3)^2+3x-4(2x-3)=9}$

$y=2x-3$

$\underline{2x^2-(4x^2-12x+9)+3x-8x+12=9}$

$y=2x-3$

$\underline{2x^2-4x^2+12x-9+3x-8x+12-9=0}$

$y=2x-3$

$\underline{-2x^2+7x-6=0}$

$y = 2x - 3$

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{-4} = \frac{-7 \pm 1}{-4}$$

$y = 2x - 3$

$x_1 = 3/2, \qquad x_2 = 2$

$y_1 = 2x_1 - 3 = 0, \qquad y_2 = 2x_2 - 3 = 1$

Rešenja sistema su $(3/2, 0)$ i $(2, 1)$.

3. Odrediti kompleksni broj $z = x + iy$ za koji važi: $|z| - z = 1 + 2i$.

Rešenje.

$\sqrt{x^2 + y^2} - (x + iy) = 1 + 2i$

$\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i$

Upoređivanjem kompleksnih brojeva sa leve i desne strane znaka jednakosti, dobija se sistem jednačina:

$-y = 2$

$\underline{\sqrt{x^2 + y^2} - x = 1}$

$y = -2$

$\underline{\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + x}$

$y = -2$

$\underline{x^2 + (-2)^2 = (1 + x)^2}$

$y = -2$

$\underline{x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2}$

$y = -2$

$\underline{x = \frac{3}{2}}$

Traženi kompleksni broj je $z = \frac{3}{2} - 2i$.

4. Izračunati

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=?$$

ako je $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ i $\cos\alpha = \frac{2}{5}$.

Rešenje.

Kako je $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ i $\sin\alpha < 0$ jer je $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, to je

$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{4}{25}} = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$,

pa je:

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{21}}{5} = \frac{2-\sqrt{63}}{10} = \frac{2-3\sqrt{7}}{10}$.

5. Rešiti jednačinu po x

$$\log_3(2x^2-2x-1)=1.$$

Rešenje.

$\log_3(2x^2-2x-1)=1$

Po definiciji logaritma je

$2x^2-2x-1=3^1$

$2x^2-2x-4=0\ /:2$

$x^2-x-2=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$

$x_1=2, \qquad x_2=-1.$

Kako je argument date logaritamske funkcije, $2x^2-2x-1$, pozitivan i za $x_1=2$ i za $x_2=-1$, to svaka od ove dve vrednosti nepoznate x predstavlja rešenje date jednačine.